



TITLE:

# 多結晶金属材料の塑性および疲れのX線的研究( Dissertation\_全文 )

AUTHOR(S):

阿部, 武治

---

CITATION:

阿部, 武治. 多結晶金属材料の塑性および疲れのX線的研究. 京都大学, 1969, 工学博士

ISSUE DATE:

1969-09-24

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.k925>

RIGHT:

多結晶金属材料の塑性および  
疲れの X 線的 研究

阿 部 武 治

多結晶金属材料の塑性および  
疲れの X 線的 研究

阿 部 武 治

# 目 次

主な記号	.....	(ix)
序 論	.....	1
第 I 部 多結晶金属の塑性および疲れ	.....	5
第 1 章 多結晶金属の塑性および疲れの実験	.....	7
1・1 緒 言	.....	7
1・2 X線回折線半価幅変化の回折面依存性	.....	9
1・2・1 半価幅についての従来の研究	.....	9
1・2・2 結晶粒の方位による因子	.....	9
1・2・3 回折にあずかる結晶粒の Schmid factor の平均値	.....	10
1・2・4 ま と め	.....	14
1・3 多結晶金属の降伏および疲れ（低応力）	.....	15
1・3・1 ま え が き	.....	15
1・3・2 考 え 方	.....	15
1・3・2・1 Schmid factor	.....	17
1・3・2・2 半 価 幅	.....	19
1・3・3 実験方法	.....	20
1・3・3・1 試験片および試験条件	.....	20
1・3・3・2 X線測定	.....	21
1・3・4 実験結果	.....	23
1・3・5 考 察	.....	27
1・3・5・1 塑性変形の場合	.....	27
1・3・5・2 疲れの場合	.....	28
1・3・5・3 組合せ応力下の疲れに対する検討	.....	29

1・4	多結晶金属の変形および疲れ（高応力）	30
1・4・1	まえがき	30
1・4・2	実験結果	30
1・4・3	考 察	35
1・4・3・1	応力値による疲れ機構の差異について	35
1・4・3・2	多結晶金属の加工硬化曲線について	35
1・5	結 言	37
1・6	付 録	38
	文 献	40
第2章	多結晶金属の降伏条件の解析	43
2・1	緒 言	43
2・1・1	まえがき	43
2・1・2	考 え 方	44
2・2	b c c 金属の場合	46
2・2・1	まえがき	46
2・2・2	方位係数の計算（ねじり）	47
2・2・3	計算結果	50
2・2・3・1	結晶方位が一様に分布する場合	50
2・2・3・2	優先方位を持つ場合	51
2・2・4	ま と め	52
2・3	h c p 金属の場合	52
2・3・1	まえがき	52
2・3・2	図式的方法による計算	53
2・3・3	積分による計算	56
2・3・3・1	$\tilde{\mu}_{\text{Ten}}$	57
2・3・3・2	$\tilde{\mu}_{\text{Tor}}$	58
2・3・3・3	$\tau/\sigma$	61

2・3・4	ま と め	62
2・4	一般の場合	62
2・4・1	まえがき	62
2・4・2	すべりと降伏条件の関係	63
2・4・2・1	$M$ の影響 ( $\alpha$ の積分)	64
2・4・2・2	$m$ の影響 ( $\theta$ の積分)	65
2・4・2・2・1	引張りの場合	67
2・4・2・2・2	ねじりの場合	67
4・4・2・3	$m = \{111\}$ の場合の計算例	68
2・4・2・3・1	$\tilde{\mu}_{Ten}$	69
2・4・2・3・2	$\tilde{\mu}_{Tor}$	70
2・4・2・3・3	$\tau/\sigma$	71
2・5	考 察	71
2・5・1	fcc金属における優先方位の影響	71
2・5・2	hcp金属における底面すべり以外の すべり, および双晶変形の影響	72
2・5・3	らせん転位の運動の影響	73
2・5・4	von Misesの法則の物理的解釈について	73
2・5・5	Dehlingerの研究との対応について	75
2・5・6	Taylor model との対応について	76
2・5・7	ま と め	78
2・6	結 言	78
2・7	付 録	79
	文 献	89
第3章	多結晶金属の変形の解析	93
3・1	結 言	93
3・2	直線硬化型異方性材料の場合	95

3・2・1	基本的な関係式	95
3・2・1・1	硬化率 $K$	95
3・2・1・2	拘束率 $\eta$ の導入	95
3・2・1・3	$\eta$ の物理的意味	98
3・2・1・4	$K$ の平均値： $\bar{K}$	99
3・2・1・5	$\Delta K$	102
3・2・2	粒界においてひずみの拘束がない場合 の多結晶体の変形	102
3・2・3	粒界においてひずみが拘束される場合 の多結晶体の変形	105
3・3	指数硬化型異方性材料の場合	112
3・3・1	基本的な関係式	112
3・3・1・1	応力とひずみ	112
3・3・1・2	$\bar{\epsilon}$ の平均値： $\bar{\epsilon}$	113
3・3・2	粒界においてひずみの拘束がない場合 の多結晶体の変形	115
3・3・3	粒界においてひずみが拘束される場合 の多結晶体の変形	116
3・3・4	ま と め	119
3・4	多結晶金属の変形と X 線測定ひずみ	119
3・4・1	まえがき	119
3・4・2	応力とひずみ	120
3・4・3	X 線測定ひずみ	120
3・4・3・1	負荷状態	121
3・4・3・2	除荷状態	123
3・4・3・3	ま と め	124
3・4・4	弾性異方性の検討	125

3・4・4・1	非等方体弾性論の一般式	125
3・4・4・2	$\Delta s_{11}'$ および $s_{12}'$	127
3・4・4・3	ま と め	129
3・5	結 言	130
3・6	付 録	131
	文 献	133
第Ⅱ部 疲れにおける平均応力および残留応力		135
第4章 疲れ過程における平均応力の影響		137
4・1	緒 言	137
4・2	曲げ疲れの場合	138
4・2・1	実験方法	138
4・2・1・1	試 験 片	138
4・2・1・2	疲れ試験	139
4・2・1・3	半価幅および残留応力の X 線測定	140
4・2・1・4	組織観察	141
4・2・2	実験結果	142
4・2・2・1	半価幅の変化	142
4・2・2・2	表面における残留応力変化	144
4・2・2・3	残留応力分布	145
4・2・2・4	表面の組織観察	146
4・2・2・5	切欠材における crack 成長の観察	149
4・2・3	考 察	151
4・2・3・1	半価幅の変化について	151
4・2・3・2	表面における残留応力変化および 残留応力の分布について	152
4・2・3・3	crack の成長について	153



4・3	ねじり疲れの場合	155
4・3・1	実験方法	155
4・3・2	実験結果	157
4・3・2・1	半価幅の変化	157
4・3・2・2	残留応力の変化	158
4・3・2・3	かたさの変化	162
4・3・2・4	組織観察	162
4・3・3	考 察	163
4・3・3・1	平均応力の影響	163
4・3・3・2	かたさの変化について	164
4・4	結 言	165
第5章	疲れ過程に発生する残留応力	167
5・1	緒 言	167
5・2	実 験	168
5・2・1	実験方法	168
5・2・2	実験結果	170
5・2・2・1	両振り疲れ過程における残留応力変化	170
5・2・2・2	負荷応力の変動と残留応力変化	173
5・2・2・2・1	応力振幅の変化と残留応力変化	173
5・2・2・2・2	平均応力の変動と残留応力変化	176
5・3	両振り疲れ過程における残留応力変化の考察	180
5・3・1	ねじり疲れにおける残留応力変化	180
5・3・2	曲げ疲れにおける残留応力変化	184
5・3・2・1	圧縮残留応力発生の機構	184
5・3・2・2	圧縮残留応力減少の機構	190
5・3・2・2・1	まえがき	190
5・3・2・2・2	変形の不連続体的解析	192

5・3・2・2・3	曲げ疲れにおける圧縮残留応力の減少	196
5・4	負荷応力変動に伴う残留応力変化の疲れ寿命への影響	199
5・4・1	まえがき	199
5・4・2	応力振幅変化の場合	201
5・4・3	平均応力変動の場合	202
5・5	結 言	204
5・6	付 録	205
	文 献	213
第 6 章	平均応力下の疲れ破壊機構の考察	217
6・1	緒 言	217
6・2	crack のエネルギー	219
6・2・1	crack 自身のエネルギーおよび crack と応力場の相互作用エネルギー	219
6・2・1・1	crack によって生ずる応力場の 弾性エネルギー : $E_1$	220
6・2・1・2	crack の表面エネルギー : $E_2$	222
6・2・1・3	外力の場における crack の 弾性エネルギー : $E_3$	222
6・2・1・4	crack が拡大するときの体積の 増加によるエネルギー : $E_4$	223
6・2・2	外部から供給されるエネルギー	224
6・2・2・1	転位の持つひずみエネルギー : $W_1$	224
6・2・2・2	外力が転位の移動に対してなす仕事 : $W_2$	225
6・3	crack の成長	226
6・3・1	crack の核の発生の過程	226
6・3・2	crack 成長の転位論的過程	228
6・3・3	crack 成長の半巨視的過程	229

6・3・4	crack の成長速度	232
6・4	平均応力の影響	233
6・5	考 察	235
6・5・1	疲れ crack の model	235
6・5・2	crack の伝播方向	237
6・5・3	疲れ以外の破壊との比較	238
6・5・4	ま と め	238
6・6	結 言	239
6・7	付 録	240
	文 献	242
結 論		245
謝 辞		

## 主 な 記 号

$E$	: Young 率
$E_c$	: crack の持つエネルギー
$G$	: 剛性率
$K$	: 結晶の硬化率
$\bar{K}$	: 2 個の結晶についての硬化率の平均値
$\tilde{K}$	: 全ての方位の結晶についての硬化率の平均値
$\tilde{K}_\epsilon$	: ひずみ一定の条件の下での平均値
$\tilde{K}_\sigma$	: 応力一定の条件の下での平均値
$M$	: すべり面とすべり方向の内の数の多いもの
$m$	: すべり面とすべり方向の内の数の少ないもの
$n_M$	: $M$ の数
$n_m$	: $m$ の数
$N$	: 応力繰返し数
$P$	: 結晶粒界領域の割合
$p$	: 応力の静水圧成分
$s_{ij}$	: 弾性コンプライアンス定数
$U_d$	: 自己拡散の活性化エネルギー
$U_m$	: 空孔の移動のエネルギー
$V_d$	: 自己拡散の活性化体積
$V_m$	: 空孔の移動に対する活性化体積
$\beta$	: X 線回折線半価幅の変化量
$r$	: せん断ひずみ
$\epsilon$	: 垂直ひずみ
$\epsilon_e$	: 弾性ひずみ
$\epsilon_p$	: 塑性ひずみ

$\eta$	:	拘束率
$\eta_L$	:	負荷時の拘束率
$\eta_U$	:	除荷時の拘束率
$\theta_o$	:	試験片軸方向とすべり面法線のなす角
$\theta_d$	:	試験片軸方向とすべり方向のなす角
$\kappa$	:	拘束係数
$\mu$	:	Schmid factor (方位係数)
$\bar{\mu}$	:	Schmid factor の部分的平均
$\tilde{\mu}$	:	Schmid factor の全ての方位の結晶についての平均
$\mu_{Ten}$	:	引張りにおける Schmid factor
$\mu_{Tor}$	:	ねじりにおける Schmid factor
$\sigma$	:	負荷応力 (引張り)
$\sigma_a$	:	応力振幅
$\sigma_m$	:	平均応力
$\sigma_r$	:	残留応力
$\tau$	:	負荷せん断応力
$\tau_a$	:	ねじり応力振幅
$\tau_m$	:	ねじり平均応力
$\tau_s$	:	すべり面上のせん断応力
$\tau_c$	:	臨界せん断応力
$\Omega$	:	立 体 角

## 序

## 論

従来、機械工学の分野で行なわれてきた金属材料の強さの研究は、主として巨視的かつ現象論的なものであり、材料の強さを試験片の変形、破断などから論ずるものであって、実用面にその主眼が置かれてきた。しかるに一方、最近10数年来の金属物性の研究の進歩、とくに格子欠陥理論の進歩とともに、材料の強さの研究においても、このような微視的（micro）な立場の研究と巨視的（macro）な立場の研究を結びつける必要が生じている<sup>(1)</sup>。機械工学的な意味における材料の強さもこれら micro な材料の性質にもとづいていることは言うまでもなく、macro な、現象論的な諸法則の基礎として、micro な物理像を導入し、相互の関連を検討し、対応づける必要がある。これは、単に学問的な興味からだけでなく、近時高度に発展しつつある諸工業の基礎として、材料の強さの問題を考える上においても重要なものであると考えられる。

しかしながら、実用に供せられる工業用材料は複雑な組成を持つため、先の物性的な研究成果をそのまま適用することは困難であり、現状では上記双方の研究領域の間には相当の開きが見られる。材料の強さの問題を統一的に理解するには、この間隙を埋める必要があると考えられるが、そのためには両者の中間領域の研究を推し進める必要があると考えられる。

これらの状況を模型的に示すと図1のようになると考えられる。すなわち巨視的な連続体を取扱う弾性力学、塑性力学から、微視的な不連続体としての原子論、転位論に至る過程を考えると、巨視的な立場に立って見たとき、

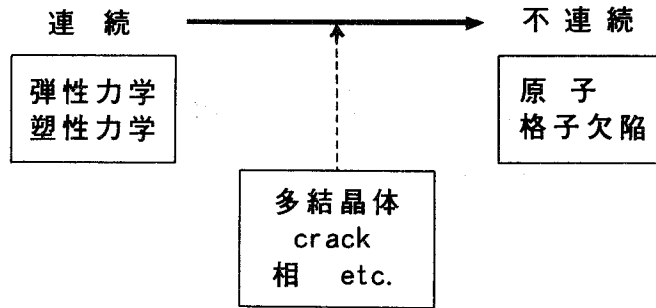


図1 材料の強さの研究の取扱う dimension による分類

転位論に至るまでに、材料が多結晶体であること、crack の発生や伝播、あるいは金属学的な相（不純物）の存在などにおいてすでに通常の連続体的な考え方をそのまま適用することは困難になる。

ところで、材料の強さを考える場合、上に述べた寸法（dimension）的な意味における macro と micro とは別に、問題に対する approach の仕方に、現象論的な立場と個々の物理的な機構を論じる立場とがある（図2）<sup>(2)</sup>。

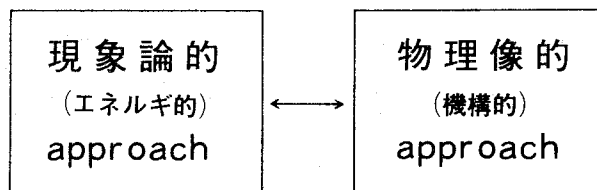


図2 材料の強さの研究の考え方による分類

すなわち前者においては、その物理的な機構にまで立ち入ることなしに、現象を記述しようとするもので、エネルギー的な考え方もこの中に入る。これに反して、各々の物理的な機構そのものを考えるのが後者である。これら二つの考え方は、相互に統計によって結びつけられる関係にあって、前者の方が考え方としてより巨視的(全体的)である。先にのべた macro と micro の

中間領域の研究を進める上においても、この現象論的な approach と機構的な approach を、それぞれの問題の特性にしたがってうまく適用することが、問題の解決にとって有効であると考えられる。

このような材料の強さの研究の問題点に立って、機械工学の立場から、物性的な研究成果を取り入れていこうとする試みが本研究の基本的な観点であって、本論文では材料の強さに関する種々の問題の中で、主として疲れおよび結晶塑性に関連した問題を取り上げる。

具体的にのべると、まず第Ⅰ部においては多結晶体としての見地から金属の塑性および疲れの問題を取りあげる。すなわちまず第1章においては、多結晶中の各結晶粒の応力軸に対する方位と結晶粒内の微視的な変形の相関性について X 線的に検討を加える。またその結果にもとづいて多結晶体の変形 model を提案し、これを用いてまず第2章においては、多結晶金属の降伏条件と結晶のすべりの関係について、続いて第3章においては、異方性を持つ結晶からなる多結晶体の変形挙動について、それぞれ解析的な検討を加える。第Ⅱ部においては、疲れにおける平均応力および残留応力の問題を取りあげる。まず第4章においては疲れ過程中における平均応力の役割についておもに X 線を用いて実験的に検討する。続いて第5章においては、焼きなまし材の疲れ過程に発生する残留応力を種々の場合について X 線的に測定するとともに、それらの変化の機構について、材料中の微視的な組織変化あるいは疲れ機構との関連において考察を加える。第6章においては疲れの問題のまとめとして、疲れ crack の発生、成長について、平均応力の影響を含めて、エネルギー的な観点から考察を加える。



## 文 献

- (1) たとえば，横堀，機械の研究，11（1959），305.
- (2) たとえば，W. Heisenberg，“現代物理学の自然像”，（昭30），  
みすず。

## 第 I 部 多結晶金属の塑性および疲れ

一般に使用されている工業用金属材料は多結晶体である。金属結晶の変形は特定のすべり面上を特定のすべり方向に起こるため、多結晶中の各結晶粒はその応力軸に対する方位によって、それぞれすべり面上の最大せん断応力成分の値が異なる。つまり、各結晶はそれぞれ異なったすべりやすさを持っている。多結晶材料が変形を受ける際に、このような方位の差異がどう響くかは問題であるが、多結晶体の塑性あるいは疲れにおいてもこのような点を考慮してはじめて材料の強さの問題を正しくとらえ得る場合があると考えられる。

材料を多結晶体と見る立場からの研究は、従来から主として結晶塑性の研究としてなされて来ているが、先にものべたように材料の強さの問題はその扱う dimension の大きさによっていくつかの段階があり、多結晶体の問題についてもたとえば次のように分けられると考えられる。

- (1) 巨視的塑性力学
- (2) 多結晶体の変形
- (3) 単結晶のすべり, substructure の形成
- (4) 転位論

このような分類において、一般に巨視的な法則はより微視的な立場から基礎づけられる必要があると考えられる。従来から、機械工学の分野においては主として(1)の観点から、他方金属物理学では(3)、(4)の観点に立つ研究が進められているが、(2)の立場はこれら二つを結びつける役割を持つもので、詳しく見ればさらに次の二つに分けられると考えられる。

- (2a) 塑性力学の基礎づけとしての多結晶の変形
- (2b) 転位論的立場からの粒界の役割等の検討

第 I 部においては、上の (2a) の観点に立って検討を加える。このような研究としては、従来から多結晶金属の加工硬化曲線と単結晶のすべりとの関連、結晶粒度の影響、あるいは圧延組織などについていくつかの研究がなされてはいるが、未だ不明な点も数多く残されており、特に塑性あるいは疲れにおける結晶方位の影響についてはあまり研究がなされていない。

そこで、まず第 1 章においては、X 線回折線の広がり（半価幅）に結晶方位の影響が現われることを示すとともに、この現象を利用して塑性および疲れにおける結晶方位の影響について実験的な検討を加える。次に実験結果から得られた多結晶金属の変形 model を用いて、第 2 章においては多結晶金属の降伏条件に、次いで第 3 章においては多結晶金属の変形の問題に、それぞれ解析的な検討を加える。

## 第1章 多結晶金属の塑性および疲れの実験

### 1.1 緒 言

金属材料の疲れ過程におけるX線回折線半価幅の変化については、平、本田ら(1)~(3)によって一連の研究がなされているが、それによれば焼きなまし材においては、半価幅は初期の急増、その後の漸増および破断前の急増の三つの段階を追って変化する。(なお以下において、半価幅(積分幅)  $b$

の定義は、図1.1において  $S$  を回折曲線の作る面積、 $h_1$  および  $h_2$  をそれぞれ  $K\alpha_1$  線、 $K\alpha_2$  線の peak 高さとしたとき、 $b = S / (h_1 + h_2)$  とする。) 半価幅の増加の原因については、同時に行なわれた残留応力変化およびかたさ変化の測定、組織観察の結果などを、考え合わせて、第1段の増加は主として材料の疲れ硬化の段階、第2段の漸増過程は microcrack の生成および成長の段階、第3段階は巨視的 crack の成長の段階であるとそ

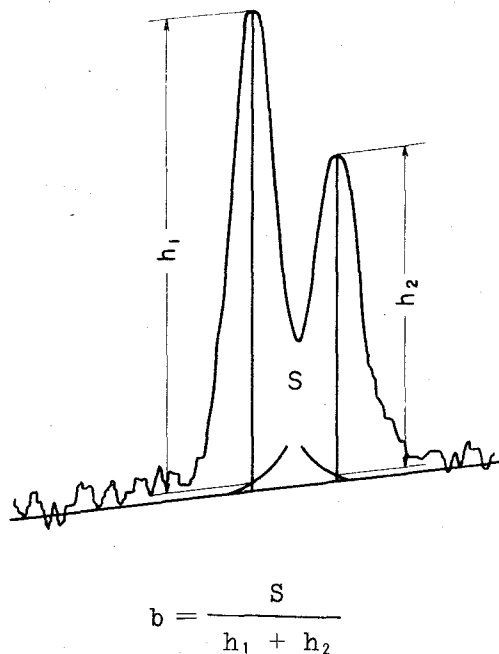


図 1.1 半価幅の定義

れぞれ考えられている。

ところで一方、低炭素鋼についての種々の回折面からの半価幅変化の測定から、疲れ過程における半価幅の変化には回折面依存性のあることが見出されている<sup>(3)</sup>。すなわち、半価幅は図1・2に示すように、応力繰返しに伴って(200)面で最大の増加を示し、(110)面では小さく、その他の面ではその中間の変化を示す。(図のたて軸は半価幅の初期値  $B$  に対する各繰返し数における半価幅  $b$  の値の比、横軸は繰返し数  $N$  である。なお、実験にはディフラクトメーターを用い、X線は  $\text{CoK } \alpha$  線である。)

ところで、X線の回折には特定の方位関係を満たす回折面をもつ結晶粒のみが関与するから、これらの結果には、結晶粒の方位と応力軸の方向との関係により定まる結晶のすべりやすさあるいは変形のしやすさが関係していると考えられる。以下

においては、この点についてまず1・2節で先の半価幅変化の回折依存

性と結晶のすべりやすさの相関性に検討を加え、続く1・3節および1・4節においては、この相関性を利用して、多結晶金属の塑性および疲れにおける結晶方位の影響について実験的に検討を加える。

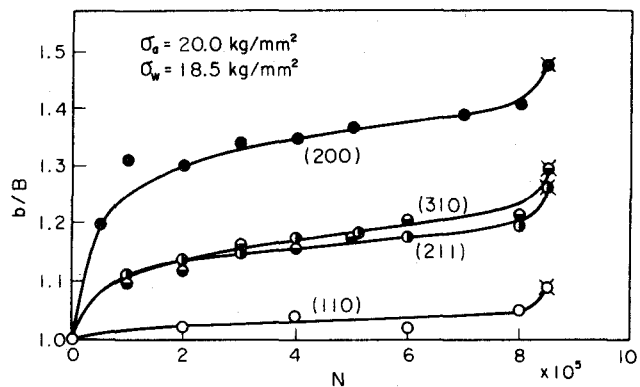


図1・2 疲れ過程における半価幅変化の回折面依存性(0.07%炭素鋼)

## 1.2 X線回折線半価幅変化の回折面依存性

### 1.2.1 半価幅についての従来の研究

X線回折線半価幅の増加は一つの因子のみで起こるものではなく、いくつもの因子が複雑にからみ合っていると考えられる。そこでまず、X線回折線半価幅の増加について従来知られている事柄を整理する必要がある。

金属材料の塑性変形に伴うX線回折線半価幅の増加については、いくつかの総説<sup>(4)~(8)</sup>にも示されているように、古くから Jones<sup>(9)</sup> らによって微粒子説、次いで Stokes ら<sup>(10)</sup> によって微小ひずみ説が提案されている。その後 Warren と Averbach<sup>(11)</sup> によってこれらの仮説を用いず、回折強度曲線のフーリエ解析による方法が考案され、理論として確立された。またその後、Averbach ら<sup>(12)</sup> によって回折線半価幅と転位密度を結びつける試みが行なわれている。さらに、格子欠陥の理論の進歩につれて、Hirsch ら<sup>(13)</sup> により積層欠陥による広がりに対する計算が bcc(体心立方)金属について行なわれている。一方、Macherauch ら<sup>(14)</sup> によって Warren - Averbach のフーリエ解析の方法を疲れの場合に適用する試みもなされているが、それによれば純ニッケルについて疲れにおける半価幅の増加には、微小ひずみと微結晶粒(subgrain)との双方の影響が認められている。しかしながら他方、フーリエ解析による方法の精度上の弱点もまた指摘されている。<sup>(15)</sup>

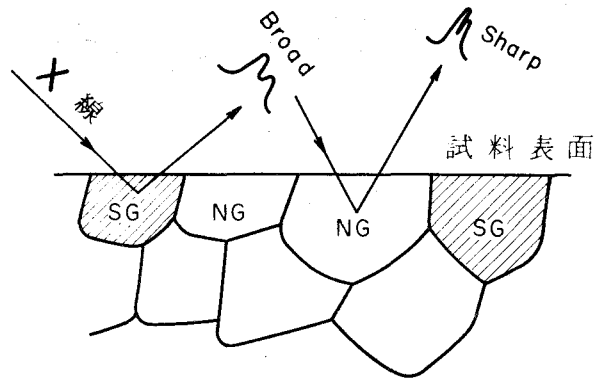
さて、これら従来検討されている半価幅の影響に対する因子は、いずれも単結晶について当てはまるものばかりであった。しかるに、多結晶体においては、これら単結晶においてすでに存在する因子を考える前に、結晶粒の方位による因子の影響を考慮に入れる必要が当然生ずると考えられる。

### 1.2.2 結晶粒の方位による因子

金属結晶が塑性変形をする際には必ずすべりを伴うが、すべりは結晶系によって定まるある特定の面上を特定の方向に生ずる。したがって今、回折条件を満たすような方位の結晶が応力軸とどのような角度関係を持ち、ど

のようなすべりやすさを持っているかが重要となる。この関係を図式的に図 1・3 に示す。

すなわち、すべりやすい方位の結晶 SG から来た回折線は結晶 SG のすべりの進行とともに半価幅が広がるが、すべりにくい方位の結晶 NG からの回折線は広がる程度が少ないと考えられる。



SG : すべりやすい方位の結晶  
NG : すべりにくい方位の結晶

図 1・3 結晶の方位と回折線の広がり  
の関係

図 1・2 に示した実験結果においては、実験条件

より回折面の法線が試料表面に垂直になっており、この条件のもとに回折にあずかる結晶粒のすべりやすさを調べる必要がある (16)。

### 1・2・3 回折にあずかる結晶粒の Schmid factor の平均値

引張応力が負荷された場合、すべり面における最大せん断応力  $\tau_s$  は図 1・4 において、

$$\left. \begin{aligned} \tau_s &= \mu_{Ten} \sigma \\ \mu_{Ten} &= \cos \theta_0 \cos \theta_d \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.1)$$

で与えられる (17) ことに、

$\theta_0$  : すべり面法線と応力方向のなす角

$\theta_d$  : すべり方向と応力方向のなす角

である。  $\mu_{Ten}$  は引張りの場合の Schmid factor (方位係数) で、 $\mu_{Ten}$  の値の大きい結晶ほどすべりやすい方位を向いていることになる。

さてここで、回折にあずかる結晶についての Schmid factor の平均値

$\overline{\mu_{\text{Ten}}}$  を求めるために、結晶学で方位関係を表わすのに用いられるステレオ投影<sup>(18)(19)</sup>を利用する。立方晶の(001)標準投影を図1・5に示す。立方晶においては、その対称性からステレオ投影内の基本三角形を考えれば充分であり、以下では図に示した三角形に囲まれた部分を選ぶことにする。

ここで図1・6のように試料表面に対して角 $\varphi$ をなす回折面からの回折を考える。一般に試料中の結晶粒の方位分布が一樣であるとする、回折にあずかる結晶群のステレオ投影上の方位は一般に図1・7の円周上にはば一樣に分布することになる<sup>(4)</sup>。今の場合、実験条件から $\varphi = 0$ であるからステレオ三角形上での応力軸の方位分布は図1・8のようになる。ここで

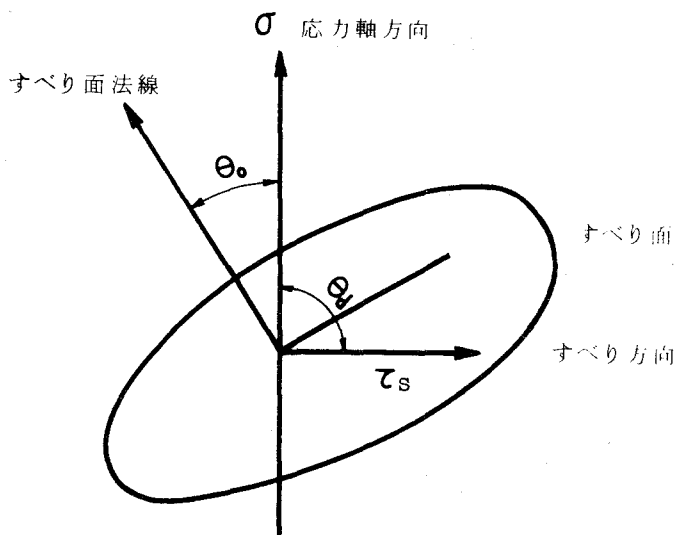


図1・4 応力軸とすべり面，すべり方向の関係

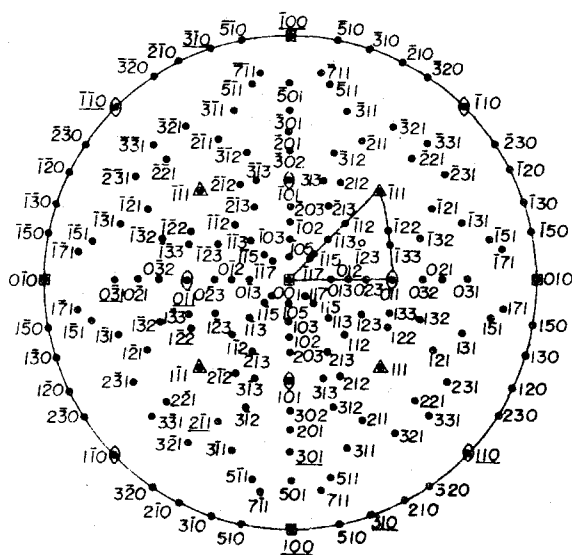


図1・5 立方晶の(001)標準ステレオ投影



簡単のため、結晶粒の方位が図1・8の太線上に一樣に分布していると仮定する（この仮定は、実際の結晶の方位分布が一樣であることとは幾分異なるが、その誤差は3%以下である）。

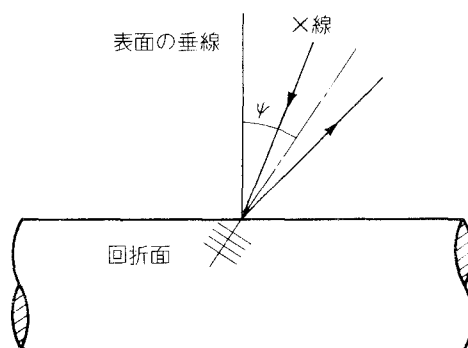


図1・6 回折面の方向

さて、基本三角形内におけるbcc金属のSchmid factorの分布はCalnanら<sup>(20)</sup>によって求められているが、それを図1・9に示す。 $\alpha$ 鉄(bcc金属)の場合、3種のすべり面があるが、常温付近での臨界せん断応力の割合は、

$$\{110\} : \{112\} : \{123\} = 100 : 103 : 105$$

であって<sup>(21)</sup>、ほぼ等しいとおくことができる。

したがって、図1・8と図1・9を組み合わせることにより、各回折面に対する $\mu_{Ten}$ の分布を求めさらにその平均値 $\overline{\mu_{Ten}}$ を求めることができる。 $\mu_{Ten}$ の分布の例を図1・10に、またその平均値の計算結果を表1・1に示す。（なお、ここでは $\overline{\mu_{Ten}}$ を図式的方法によって求めたが、近似的に計算によって求める方法を付録1・6に示す。）

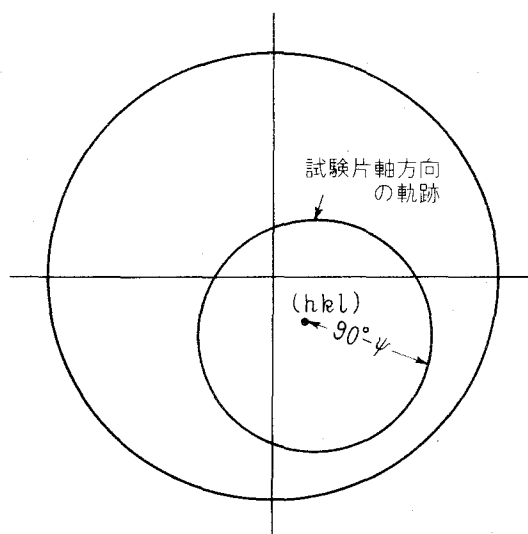


図1・7 (hkl)回折の場合に試験片軸のとりうる方向

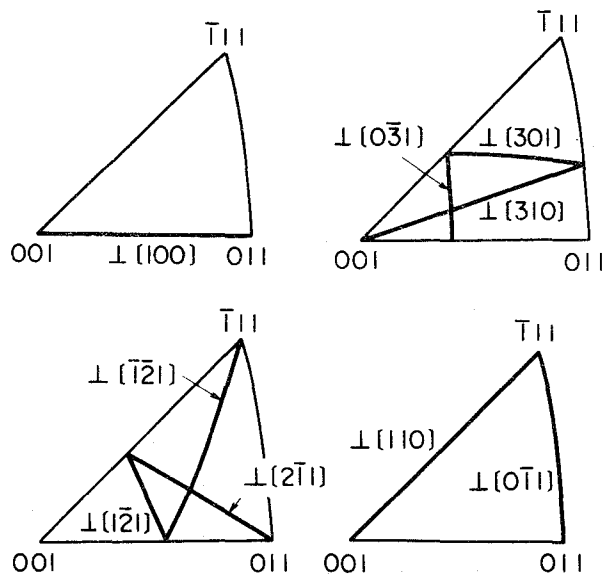


図 1・8 各回折面に対して試験片軸のとりうる方向

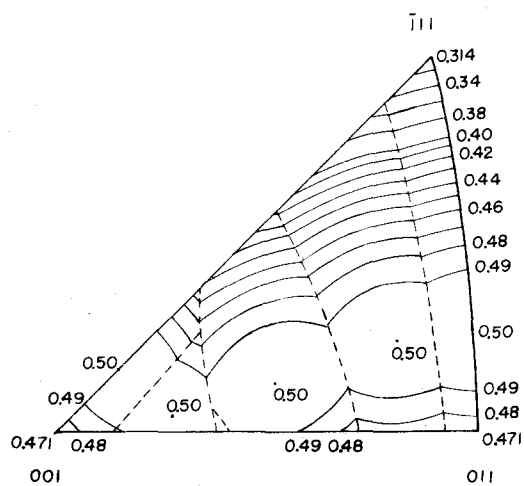


図 1・9  $\alpha$ 鉄 ( bcc 金属 ) の " $\mu_{Ten} = \text{一定}$ " の曲線 ( Calnan らによる )

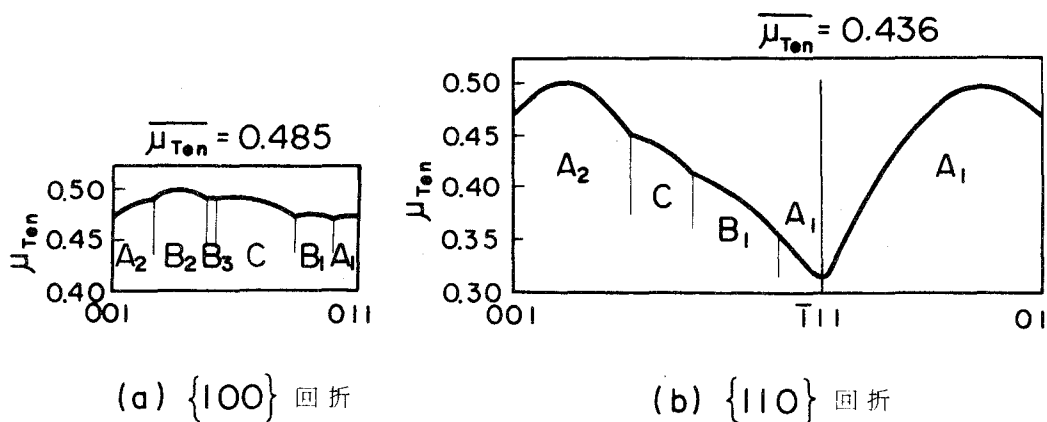


図 1.10 各回折面に対する  $\mu_{Ten}$  の分布の例

表 1.1 各回折面に対する  $\overline{\mu_{Ten}}$  の値

回 折 面	$\overline{\mu_{Ten}}$	$\tau = \overline{\mu_{Ten}} \sigma_a$ ( $\sigma_a = 20.0 \text{ kg/mm}^2$ ) ( $\text{kg/mm}^2$ )
(200)	0.485	9.7
(310)	0.486	9.7
(211)	0.462	9.2
(110)	0.436	8.7

#### 1.2.4 ま と め

これらの結果をみると、 $\overline{\mu_{Ten}}$  の値は (200) 面回折のとき大きく、(110) 面回折のとき極端に小さい。すなわち、(200)面回折にあずかるような結晶

は総体的にすべりやすい方位を向いていることがわかる。(表には参考のため、負荷応力 $\sigma_a = 200 \text{ Kg/mm}^2$ の場合にすべり面に働く平均的なせん断応力 $\tau = \overline{\mu_{\text{Ten}}} \sigma_a$ の値も示した。) これは、先に図 1・2 に示されるように半価幅の変化が(200)面で大きく、(110)面で小さいという傾向と一致しており、したがって半価幅変化には、このような結晶粒の方位にもとづく因子が含まれていることが結論される。なお、疲れの場合すべりを生じた結晶と全くすべっていない結晶とがあることは、表面の電子顕微鏡による観察<sup>(3)</sup>によっても認められる。

### 1・3 多結晶金属の降伏および疲れ(低応力)

#### 1・3・1 ま え が き

上にのべたように、X線回折線半価幅の変化に結晶方位の影響があることから、以下では逆にこの現象を利用して、多結晶体の塑性あるいは疲れにおける結晶方位の影響について実験的に検討を加える。先にのべたのは bcc 金属である炭素鋼についてであったが、以下ではすべり系の数が少なく解析が比較的容易で、塑性変形に対する研究も多くなされている fcc (面心立方) 金属の銅を用いる。

本節ではまず低応力下の疲れおよび降伏点近傍のひずみの小さい領域の塑性変形について調べ、次節において高応力の場合について検討する(ここに低応力の領域とは、疲れ破断繰返し数  $N_f = 10^7$  前後に相当する応力であり本実験材料ではほぼ  $7 \lesssim \sigma \lesssim 10 \text{ Kg/mm}^2$  の領域に相当する)。

#### 1・3・2 考 え 方

前節では引張りの場合の結晶のすべりやすさを表わす Schmid factor  $\mu_{\text{Ten}}$  についてのべたが(1・1式)、ねじりの場合にも同様に、すべり面に働くせん断応力を  $\tau_s$  , 負荷ねじり応力を  $\tau$  とすると、

$$\tau_s = \mu_{\text{Tor}} \tau \quad \cdots \cdots \cdots (1.2)$$

と表わすことができる。ここに、 $\mu_{\text{Tor}}$  はねじりの場合の Schmid factor である。結晶粒の方位と比較して変形の差異を実験的に求めるには、X 線の回折にあずかる方位の結晶に対して、その変形の程度を回折線の広がり、あるいは回折はん点のばけとして取出す必要がある。具体的には次の二つの方法が考えられる。

(1) 多結晶中から 1 個の結晶粒を選び出し、その Laue 写真を取って方位を定めるとともにはん点の広がりを求める。この場合、Laue はん点の性質上回折線の広がりに対する定量的な議論は困難である。

(2) X 線 Debye 回折線の広がりを用いる。この場合回折にあずかる結晶の方位はある分布を持つので、それらの結晶粒のもつ方位関係を利用してなんらかの方法でそれらの Schmid factor  $\mu$  の平均値を求めておく必要がある。

ここでは後者の方法を用いることにするが、この場合適当な条件を選んで異なった Schmid factor  $\mu$  の値を持つ面から回折線を得る必要がある。その方法としてはさらに次の二つが考えられる。

(a) 特性 X 線を変えることによって異なった Miller 指数 ( $h, k, l$ ) を持つ面からの回折線を得るようにする。ただし、幾何学的条件をそろえるために、回折にあずかる面の方向は一定、たとえば試料表面に垂直にしておくものとする。前節でのベタディフラクトメータを用いるのはこの方法である。しかし、この方法では面指数および Bragg 角  $\theta$  が変わるため、半価幅の依存性には  $\mu$  のみでなく  $\theta$  に依存した他の因子もはいつてくる<sup>(6)</sup>。そこでそれらを分離する必要があるが、これはかなり複雑となる。

(b) 同一ターゲット、同一面指数の回折面を用いるが、入射 X 線の変え試料面に対して種々の角度を向いた回折面からの回折線を得て比較する。ただしこの場合、斜めに X 線を入れることによって半価幅の広がりに幾何学的条件による因子<sup>(22)</sup>がはいつてくるので、なんらかの方法でこれを補正する必要がある。

ここでは(b)の方法を用いることにし、幾何学的因子を打消すために類似の形状の試験片を用い、応力条件を変えた場合について比較することにする。

### 1.3.2.1 Schmid factor

回折にあずかる結晶粒のもつ Schmid factor  $\mu$  の平均値  $\bar{\mu}$  を求めるには、前節でのべたステレオ投影による方法を用いる。試料表面に対して種々の角  $\varphi$  をなす回折面からの回折を考え、(図 1・6)、先の図 1・7 に示す関係を用いて(400)回折

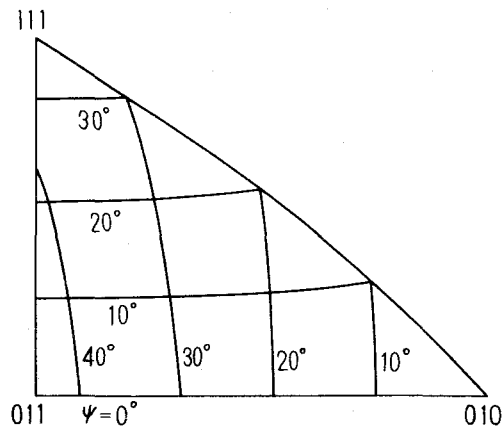


図 1・11 試料表面と傾き角  $\varphi$  をなす回折面を持つ結晶が試験片軸としてとりうる方向〔(400)回折〕

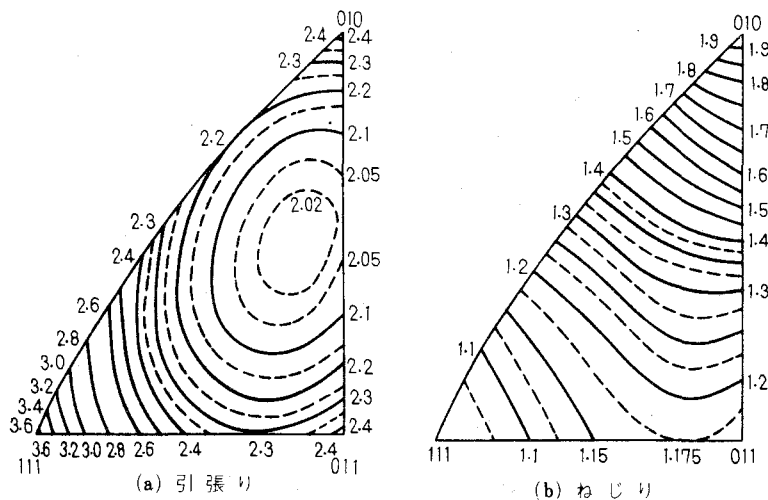


図 1・12 ステレオ三角形上の  $m'$  ( $m' = 1/\mu$ ) の分布 (Sachs による)

の場合の試料軸の方向を(011) 標準投影の三角形上に示すと図1・11のようになる。

一方, Sachs<sup>(23)</sup>によれば, fcc金属におけるSchmid factorの逆数 $m'$  ( $m' = 1/\mu$ )の分布は, 引張りとねじり応力の場合でそれぞれ図1・12 (a), (b)のようになる。 $\varphi$ の種々の値について, 図1・11に示される曲線に沿つての $m'$ の分布は図1・12から求められる。その一例を図1・13に示す。

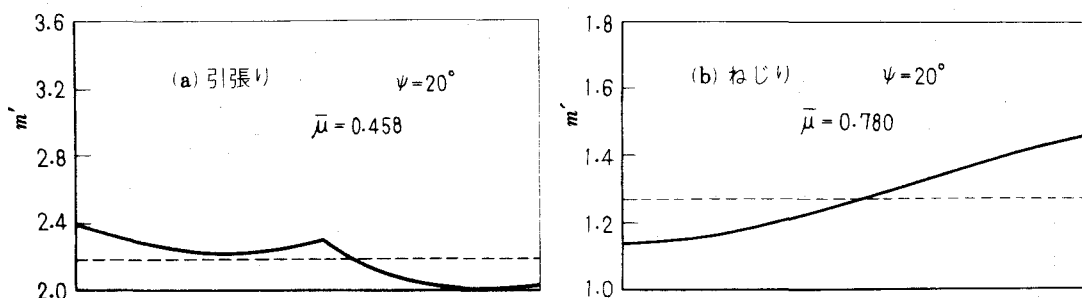


図1・13 試験片軸方向に対する $m'$ の分布

これらの分布から, 回折にあずかる結晶の $m'$ の平均値を図式的に求めることができる。その結果を表1・2に示す。(ただしここで,  $\bar{\mu} = 1/\bar{m}'$ とした。また,  $\tilde{\mu}$ はすべての方位についての $\mu$ の平均値である。)

表1・2に示されるように,

$$\left\{ (\bar{\mu}/\tilde{\mu})_{\text{Ten}} - (\bar{\mu}/\tilde{\mu})_{\text{Tor}} \right\} \dots\dots\dots (1.3)$$

の値は $\varphi$ の種々の場合について異なった値をもち, この差異を利用してSchmid factorの影響をとり出すことが可能である。

表 1・2 (400) 回折における回折面の傾きによる  
Schmid factor の変化

$\psi$	引 張 り		ね じ り		$\left(\frac{\bar{\mu}}{\tilde{\mu}}\right)_{\text{Ten}} - \left(\frac{\bar{\mu}}{\tilde{\mu}}\right)_{\text{Tor}}$
	$\bar{\mu}$	$\bar{\mu}/\tilde{\mu}$	$\bar{\mu}$	$\bar{\mu}/\tilde{\mu}$	
0°	0.46	1.04	0.69	0.89	0.15
10°	0.47	1.06	0.71	0.92	0.14
20°	0.46	1.03	0.78	1.01	0.02
30°	0.42	0.94	0.85	1.10	-0.16
40°	0.44	0.98	0.86	1.11	-0.13
	$\tilde{\mu}=0.45$		$\tilde{\mu}=0.77$		

#### 1・3・2・2 半 価 幅

先にのべたように、X線回折線半価幅の増加は、一般に結晶の微細化や微小ひずみと対応するもので<sup>(6)</sup>、ともに結晶の微視的な乱れの程度を表わすものであり、転位密度につながるものである<sup>(12)</sup>。

さて、測定したX線回折線強度分布曲線の半価幅  $b$  から、実験装置自身のもつ分布曲線の広がり  $B$  や幾何学的な原因による広がり  $\beta_\varphi$  などを除去し試料の変形に伴う固有の広がり  $\beta'$  を求めるには、一般に convolution (たたみ込み)<sup>(6)</sup> と呼ばれる積分によるが、ここでは簡単のため各分布曲線の形を Cauchy 分布形であると仮定する。そうすると convolution は簡単になって、次のように和の形で表わすことができる<sup>(6)</sup>。

$$b_\varphi = B_\varphi + \beta' = B_0 + \beta_\varphi + \beta' \quad \dots\dots\dots (1・4)$$

ここに、 $b_\varphi$  および  $B_\varphi$  は角  $\varphi$  だけ傾いた場合の変形後および変形前の半価幅、また  $B_0$  は  $\varphi = 0$  の場合を表わし、これらは実験により求めることができる(なお、 $B_0$  および  $\beta_\varphi$  は応力負荷の種類によっては影響されない)。



ここで半価幅の増加を示す量として,

$$\beta = (b\varphi - B\varphi) / B_0 \dots\dots\dots (1.5)$$

を用いることにする。引張りおよびねじりの場合の  $\beta$  をそれぞれ  $\beta_{Ten}$ ,  $\beta_{Tor}$  で表わすと, (1.5)式から,

$$\beta_{Ten} - \beta_{Tor} = \frac{(b\varphi)_{Ten} - (b\varphi)_{Tor}}{B_0} \dots\dots\dots (1.6)$$

となり, 実験的に定めることができる。すなわち, 差をとることによって近似的に入射角を傾けたことによる幾何学的因子の影響を消去することができる。

以上のべたことから, 結晶のすべりやすさをSchmid factorの平均値として求め((1.3)式), 一方結晶格子の乱れをX線回折線半価幅の広がりによって実験的に求めて((1.6)式), これらの値を比較することによって結晶変形の際の方位の影響について調べることが可能である。

### 1.3.3 実験方法

#### 1.3.3.1 試験片および試験条件

fcc金属として実験に使用した銅の成分分析値を表1.3に示す。材料は

表1.3 成分分析値(%)

Cu	Sn	Pb	Ni	Fe	P	O <sub>2</sub>
99.896	0.018	0.008	0.003	0.001	0	0.043

所定寸法に機械加工した後真空中で500℃1時間焼なましを行なった。  
試験片表面はキリンス液で仕上げた。結晶粒度は平均直径にして約0.03mmであった。試験片の形状、寸法を図1・14に示す。疲れ試験は小形小野式回転曲げ疲れ試験機および西原式ねじり疲れ試験機によった。曲げ疲れにおけるS-N線図を図1・15に示す。

疲れ試験に際してはTrescaの条件によって応力値を選んだ。一方、塑性変形の場合にはvon Misesの条件による相当応力 $\sigma^*$ 、相当ひずみ $\epsilon^*$ (24)で整理した。すなわち、

$$\sigma^* = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}, \quad \epsilon^* = \sqrt{\epsilon^2 + \frac{1}{3}\sigma^2} \quad \dots\dots\dots (1.7)$$

しかしながら、本実験では引張りとねじりの差の傾向のみを問題にするので、このような応力条件の選び方はさほど重要ではない。

### 1・3・3・2 X線測定

X線測定にはフィルム法を用い、背面反射カメラに試料の回転支持台を取り付け、一定速度で試料を回転させながら回折像を得た。試料表面と角 $\varphi$ をなす回折面からの回折線を得るためには、試料を入射X線に対して、 $\varphi + \eta$ だけ傾けた(ここ

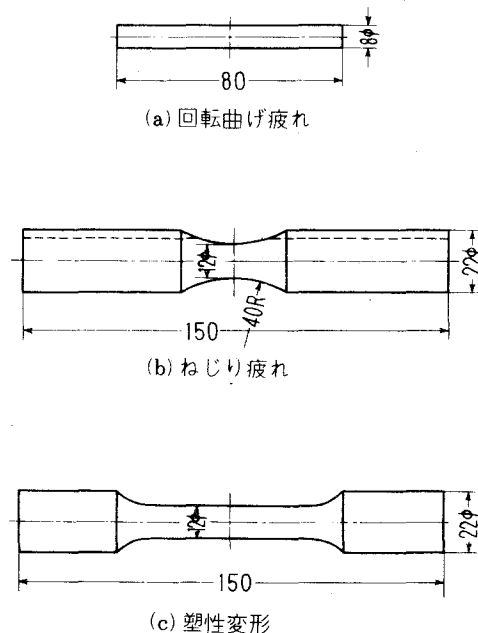


図1・14 試験片

に Bragg の角を  $\theta$  としたとき、 $\eta = 90^\circ - \theta$  である。この場合、X線の集中条件が変化するため、それによる広がりも結果に含まれることになる)。X線実験条件を表 1・4 に示す。現像条件による誤差が入るのを防ぐため、引張りとねじりのフィルムは同時に現像を行なった。また、得られたフィルムは自動記録式マイクロフotメータにかけて回折強度分布曲線を得た。

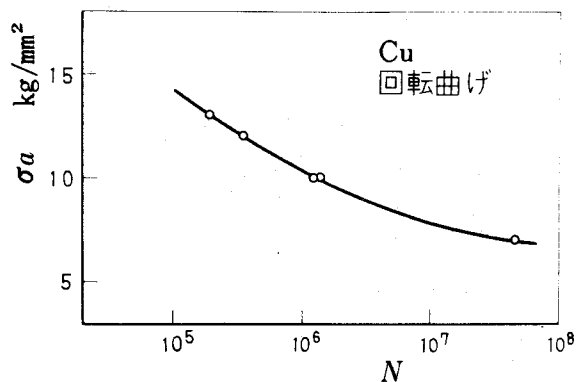


図 1・15 S - N 曲線

表 1・4 X 線 実 験 条 件

特 性	X 線	CoKα
回 折	面	Cu (400)
管 電	圧	35 kV
管 電	流	20 mA
ス リ ッ ト		1 mmφ ダブルピンホール
フ イ ル タ		Fe はく
フ イ ル ム 試 料 間 距 離		70 mm
露 出 時 間		60 min
フ イ ル ム		フジ 100 タイプ

#### 1・3・4 実験結果

まず基礎となる疲れ過程における半価幅の変化を回転曲げ疲れの場合について求めた結果を図1・16に示す。この変化の傾向は炭素鋼についての結果<sup>(2)</sup>と同様で、初期に急増しその後応力繰返しとともに徐々に増加する。次に、同じく銅について塑性変形の場合の半価幅の変化を、引張りとねじり変形について求めた結果を図1・17に示す。図には参考のため、応力一ひずみ線図も同時に示した。

これらを基礎として、次に疲れと塑性変形における結晶の変形を調べるため、先の $\mu$ と $\beta$ の関係を、それぞれの場合について実験的に検討した結果についてのべる。まず、疲れで応力 $\sigma_a = 10 \text{ Kg/mm}^2$ ,  $\tau_a = 5 \text{ Kg/mm}^2$ で $N = 2 \times 10^5$ の場合の結果を図1・18に示す。図のたて軸は(1・6)式に示した $(\beta_{\text{Ten}} - \beta_{\text{Tor}})$ であり、横軸は(1・3)式あるいは表1・2に示した曲げとねじりの Schmid factor の差である。また図中には回折面の傾き角 $\varphi$ (図1・6)も示した。さらに、数回測定した半価幅の平均値の標準誤差も書き加えた。

(これらのばらつきは主として半価幅を測定したフィルム上の位置の違いに起因するものである。)

実験は $\varphi = 0^\circ, 20^\circ, 30^\circ$ の三段階について行なったが、実験点は図1・18に示されるように右上がりの傾斜した1本の直線にのるようである。直線が右上がりであるこ

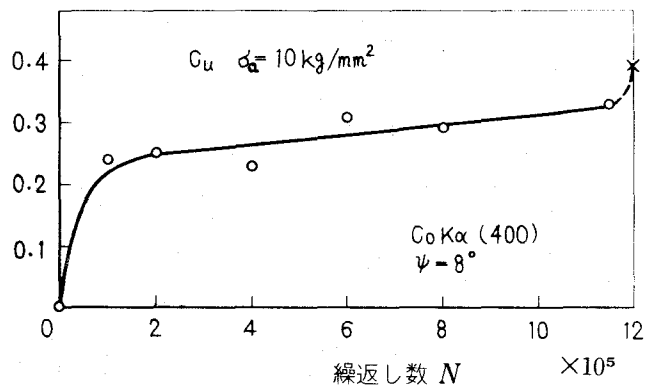


図1・16 疲れ過程における半価幅変化

とは、疲れにおいて、

Schmid factor の大きい結晶は多くのすべりを生じており、 $\mu$ の値の小さい結晶はこれに比べてすべり量が少ないことを示していると解釈される。

図 1・19 は同じく疲れの破断直前の状態における  $\beta$  と  $\mu$  の関係で、この場合もやや右上がりの傾きをもつようである。

図 1・20 は応力の低い場合で、 $\sigma_a = 7 \text{ Kg/mm}^2$ 、 $\tau_a = 3.5 \text{ Kg/mm}^2$  で、 $N = 3 \times 10^6$  におけるものであるが、同じく右上がりの傾向をもっている。

これに反して、図 1・21 は塑性変形の場合について同様の測定を行なった結果であって、相当ひずみ  $\epsilon^* = 0.5 \%$  の場合である。この場合は先の疲れの場合とは異なって実験点はほぼ水平な直線上にのる傾向を示す。

すなわち、結晶の方位によっては結晶粒の変形に大きな差異が現われていないようである。

図 1・22 は同じく  $\epsilon^* = 1.9 \%$  の場合であるが、この場合も同様に実験点を結ぶ直線は水平である。このように疲れと塑性変形では結晶の変形のように異なっているのは興味深い。

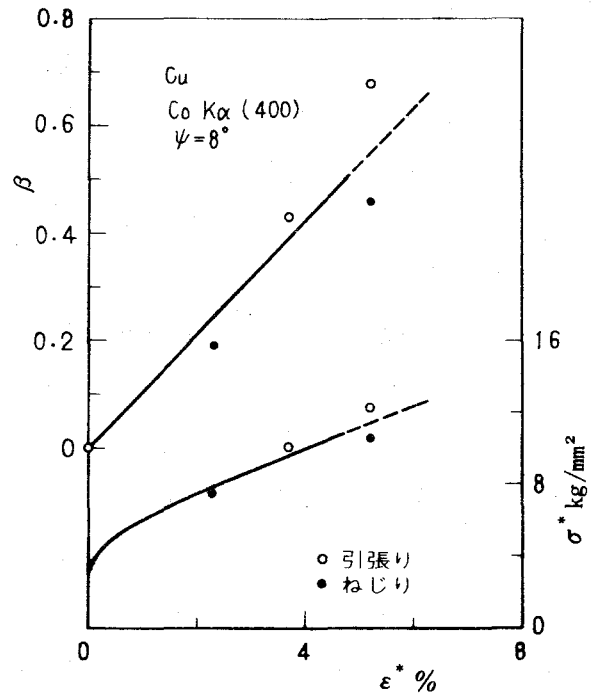


図 1・17 塑性変形における半価幅変化

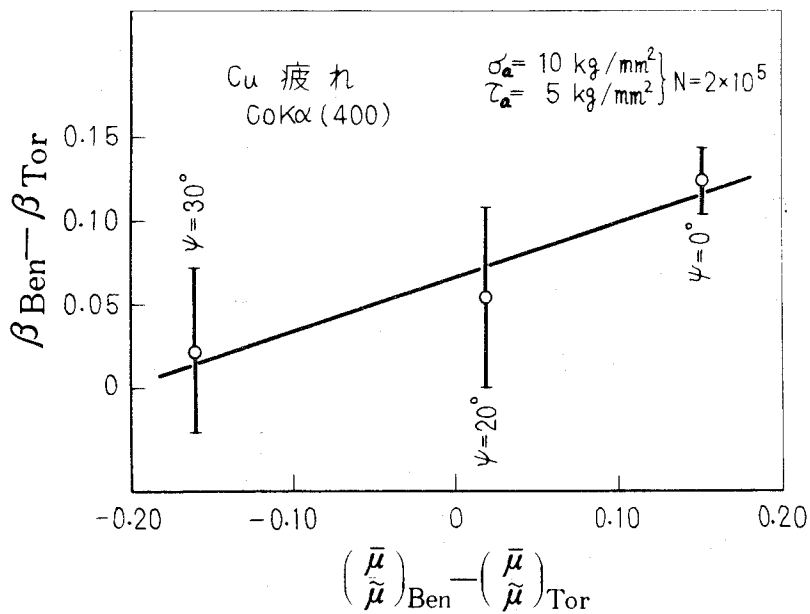


図 1.18 Schmid factor と半価幅の関係

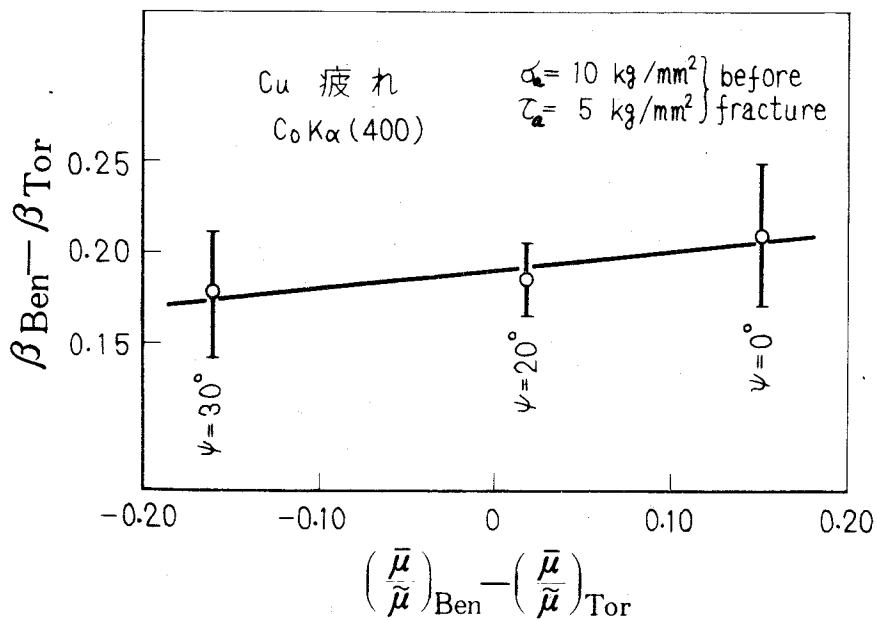


図 1.19 Schmid factor と半価幅の関係

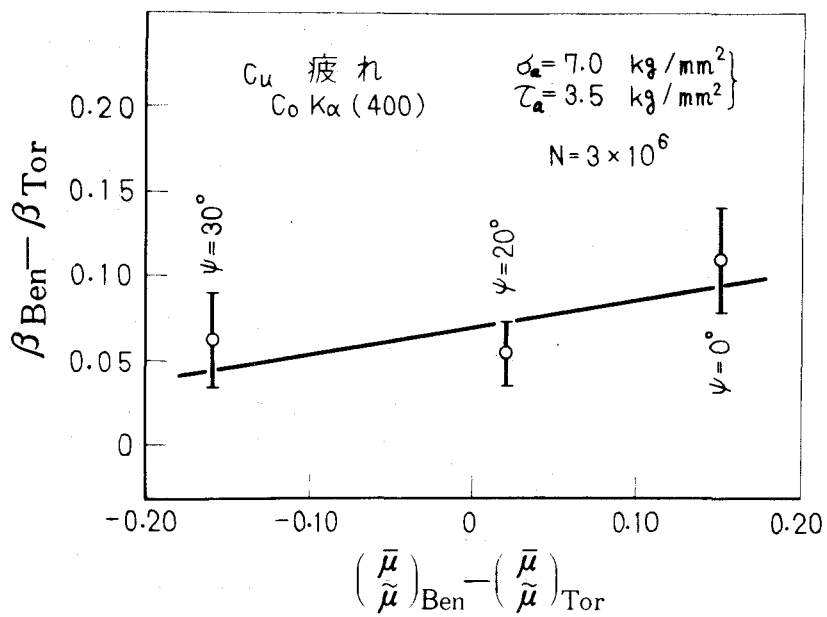


図1.20 Schmid factor と半価幅の関係

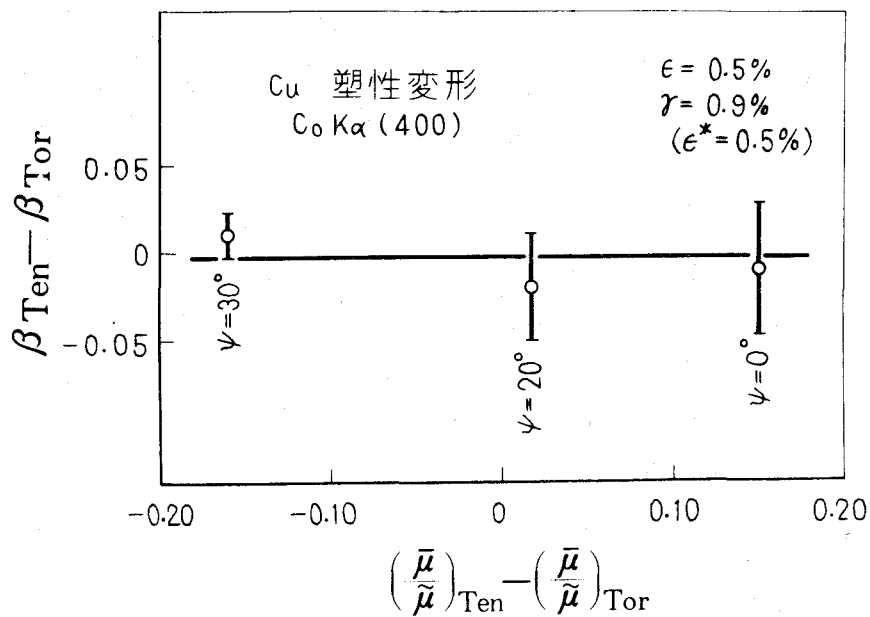


図1.21 Schmid factor と半価幅の関係

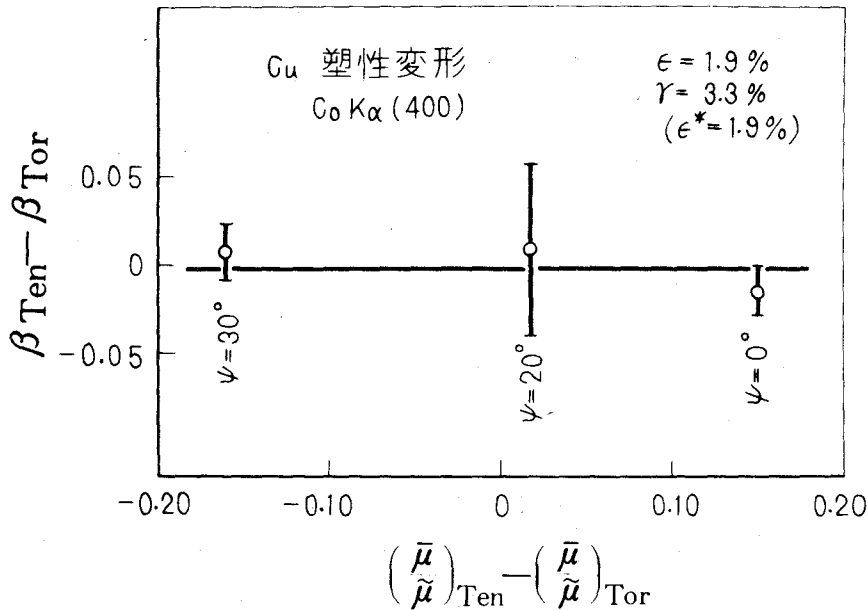


図 1.22 Schmid factor と半価幅の関係

### 1.3.5 考 察

#### 1.3.5.1 塑性変形の場合

ここではまず塑性変形の場合を考えてみる。 図 1.21, 1.22 に見られるように、塑性変形の場合半価幅変化が  $\mu$  の値にあまり影響されないことは、結晶の変形が方位によらずほぼ一定であることを示している。

顕微鏡観察<sup>(25)</sup>によると、多結晶銅を塑性変形させた場合、ひずみが 0.1 % 程度から大きくなると粒界の影響が現われ、ひずみが 1 % 程度以上になると多重すべりを生じることが報告されている。これから推量すれば、本実験で用いたひずみ 0.5 % および 1.9 % は、粒界の拘束を受けた結果いずれの結晶でもすべっているが、それほど複雑な変形をしてはいない状態であると考えられる。 すなわち、このようなひずみの領域に対応して図 1.21, 1.22 に示すようにみかけ上方位によらないという結果が現われたものと考えられる。



### 1・3・5・2 疲れの場合

図1・18～図1・20 から， 疲れの場合 Schmid factor の大きい結晶，すなわちすべりやすい方位を向いた結晶でより多くすべっていることがわかる。このことは，先にものべたように顕微鏡観察において疲れにおけるすべり線の現われ方に結晶粒によって多いものと少ないものとが見られること(3)(26)とも対応している。

一般に，疲れ現象においてはmicrocrackを含めcrackの成長が重要であることが知られている(27)(28)。疲れ破壊がこのようにcrackの成長によって生ずるとすれば，そのような破壊にいたるcrackの源であるmicrocrack（転位論的なcrack）が重要な役割をしめることになる。このようなmicrocrackは，最初一つの結晶粒内で発生，成長すると考えられる。したがって，疲れにおいては最も適当な方位を向いた結晶内においてmicrocrackが発生し成長するか否かが疲れ限度を決定すると考えることができるであろう。すなわち，疲れにおいては，このような適当な方位を向いた結晶粒が重要な役割をはたしているとみなすことができる。

このような結晶の変形のようなすはmodel化して考えるといっそう明確になる。すなわち，極端な場合として図1・23(a),(b)に示す二つの場合が考えられる。ここに，(b)は最もすべりやすい結晶だけがすべる場合であり，(a)はひずみが拘束されているためいずれの結晶粒でもすべりを生じる場合である。(a)はSachsによる多結晶の変形modelに相当するもので，先の実験結果(図1・21，図1・22)はひずみの小さい領域の変形ではSachs modelが妥当であることを示していると考えられる。

またこれらのmodelは破壊の確率論における空間的modelとも対応させることができる。すなわち(b)は確率論で知られている最弱リンク仮説(weakest link model)に，(a)は並列模型(bundle model)に対応する(29)。このようなmodelとの対応はまた，疲れ破壊の統計的なばらつきとも関連していると考えられる。

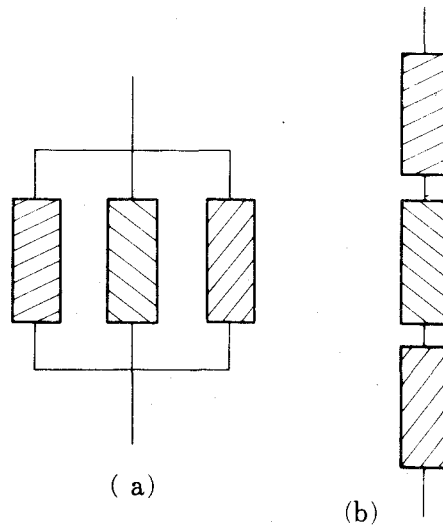


図 1・23 多結晶体の変形の model

### 1・3・5・3 組合せ応力下の疲れに対する検討

西原, 河本<sup>(30)</sup>による面心立方金属についての疲れ試験によれば, 組合せ応力下の疲れ限度は Tresca の条件<sup>(31)</sup>によく一致することが認められており, この傾向は Forrest による整理<sup>(32)</sup>にも示されている。

これに対して, 組合せ応力下の塑性変形における降伏点について, 同じく面心立方金属の場合に Taylor ら<sup>(33)</sup>が求めた実験結果は, von Mises の条件<sup>(31)</sup>にしたがうことが報告されている。

ところで, Sachs<sup>(23)</sup>が指摘したように, ねじりと引張りの降伏応力比を Schmid factor を用いて書き表わすことができる(詳しくは, 第 2 章においてのべる)。降伏点近傍においては, すべての方位の結晶が同様にすべるとすると(図 1・21, 1・22), すべての方位の Schmid factor の平均値  $\bar{\mu}$  をとることによって, 図 1・12 および (1・1), (1・2) 式から図 1・23(a) の model に対応して

$$\frac{\tau}{\sigma} = \frac{\tilde{\mu}_{\text{Ten}}}{\tilde{\mu}_{\text{Tor}}} = 0.57, \dots\dots\dots (1.8)$$

となり<sup>(23)</sup>，これは von Mises の条件から得られる値と一致する(第2章参照)。

一方疲れの場合，先にのべたようにすべりやすい方位の結晶が重要な役割をはたしていること(図1・18 ～ 1・20) から，その極端な場合として図1・23 (b) の model を考え，せん断応力が最大の結晶が疲れ破壊を，したがって疲れ限度を支配すると考えると， $\mu_{\text{max}}$  のみを考えて，

$$\frac{\tau}{\sigma} = \frac{(\mu_{\text{Ten}})_{\text{max}}}{(\mu_{\text{Tor}})_{\text{max}}} = 0.50 \dots\dots\dots (1.9)$$

となり，これは Tresca の条件による値と一致する。すなわち，ここで  
のべた結晶の変形についての実験結果は，図1・23 の model を介して組合せ応力下の疲れおよび塑性変形の実験結果<sup>(30) (33)</sup>とよく対応していると言える。

本章では fcc 金属のみを取扱ったが，降伏条件の問題については第2章で他の結晶形の場合あるいは優先方位のある場合などを含めて解析的な面から検討する。

#### 1・4 多結晶金属の変形および疲れ(高応力)

##### 1・4・1 ま え が き

本節では，前節に引き続いて，比較的高い応力の疲れおよびひずみの大きい領域の塑性変形における結晶方位の影響について検討を加える(ここに，高応力の領域とは，疲れ破断繰返し数  $N_f = 10^5$  前後に相当する応力であり，本実験材料ではほぼ  $10 \leq \sigma \leq 13 \text{ Kg/mm}^2$  の領域に相当する。)

なお，用いた材料，実験方法などは前節と同様である。

##### 1・4・2 実 験 結 果

高応力の場合の実験結果を，たて軸には引張り(曲げ)とねじりの半

価幅の差，横軸には同じ

く Schmid factor の差をとって整理した結果を，疲れの場合を図1・24に，塑性変形の場合を図1・25にそれぞれ示す。図からわかるように，実験結果は前節の低応力の場合とは異なって1本の直線で表わすことができない。これは，応力が高い領域になると Schmid factor  $\mu$  による整理が妥当でなくなることを

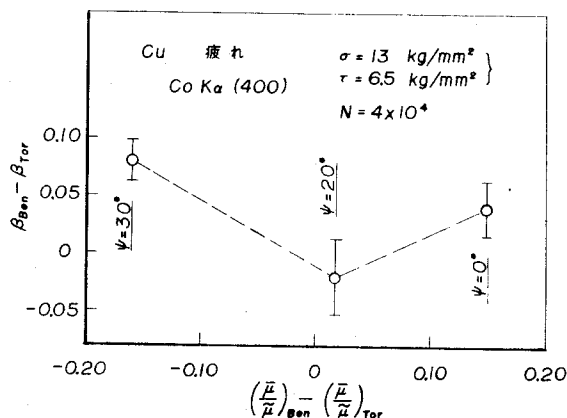


図1・24 Schmid factor と半価幅の関係

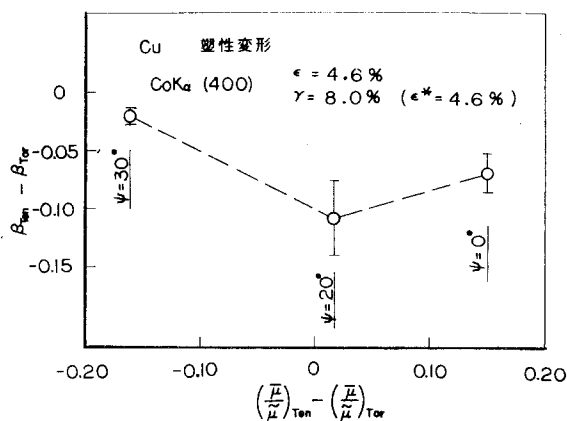


図1・25 Schmid factor と半価幅の関係

示していると考えられる。

先の  $\mu$  の考え方においては，すべての方位の結晶の臨界せん断応力  $\tau_c$  が等しいと仮定し，ある結晶の方位の影響はその結晶の  $\mu$  の値にのみ現われるものと考えた。

すなわち，各結晶粒はその方位によってすべり面に働く応力が異なり，その応力差によってひずみ量に差が生じ，結果的に

半価幅変化に差異が生ずるものと考えた。しかしながら、Kemsley<sup>(34)</sup>によれば、銅の単結晶に繰返しひずみおよび単純引張変形が加えられたときの加工硬化曲線は、繰返しひずみの小さい領域（ひずみ振幅 0.0001）では結晶方位による硬化の差異はほとんどないが、繰返しひずみの大きい所（ひずみ振幅 0.004）および引張変形では方位によって硬化度に著しい差異が見られることが報告されている。これは、ひずみが大きくなると、特定の方位の結晶では多重すべりによるすべりの交叉などによって、急激な硬化を示すためと考えられる。方位による加工硬化度の違いとしては、単結晶を、（110）方向に引張ったときには加工硬化率が低いのに対し、（100）あるいは（111）方向が引張応力軸方向である場合には、著しく高い値を示している。このように変形量の大きい（高応力）の場合、方位によって加工硬化率が異なることは、さきの  $\mu$  の考え方に含まれる  $\tau_c = \text{一定}$  の仮定がもはや成立していないことを示している。すなわち、結晶粒の方位によっては多重すべりを生じ、subgrain の形成が起こりやすく、加工硬化が大きくなると考えられ、結局  $\mu$  による整理が妥当でなくなったものと考えられる。いいかえると、高応力の場合の実験結果に対してはこのような方位による加工硬化率  $K$  の差を考慮する必要があると考えられる。

そこで次に、さきの半価幅変化（図 1・24, 1・25）を、この加工硬化率  $K$  の方位による差異という観点から整理し直すことを試みる。まず、回折面の傾き角  $\phi$ （図 1・6）のそれぞれの値に対して  $K$  の平均値  $\bar{K}$  を求めた結果を表 1・5 に示す。ただし、表中の  $\bar{K}$  はすべての方位についての  $K$  の平均値である。 $K$  の値としては、引張変形については Kemsley らの実験結果を用いた。また、ねじりの場合には Cu についてのデータが見あたらないので、Al の塑性変形における値<sup>(35)</sup>で代用した。（一般に Al は Cu と同じ fcc 構造を持ち、変形に際しては似た傾向を示すことが知られている<sup>(26) (34) (36)</sup>。）

図 1・24, 図 1・25 を  $\mu$  のかわりに  $K$  で整理し直したのが図 1・26, 1・27

である。(ここで、疲れ、塑性変形とも図の横軸には表1・5 の値を用いた)  
 このように $\bar{K}$ で整理すると実験点は疲れ、塑性変形とも右上がりの1本の直線  
 で表わされる。 また、疲れの繰返し数の進んだ場合の例を図1・28 に示  
 す。

表1・5 (400) 回折における回折面の傾きによる  
 加工硬化率の変化

$\psi$	$\bar{K} / \bar{K}$		$(\frac{\bar{K}}{\bar{K}})_{Ten} - (\frac{\bar{K}}{\bar{K}})_{Tor}$
	引 張 り	ね じ り *	
0°	1.15	1.30	-0.15
10°	0.86	1.16	-0.30
20°	0.57	0.82	-0.25
30°	0.74	0.72	0.02

\* Al の データ

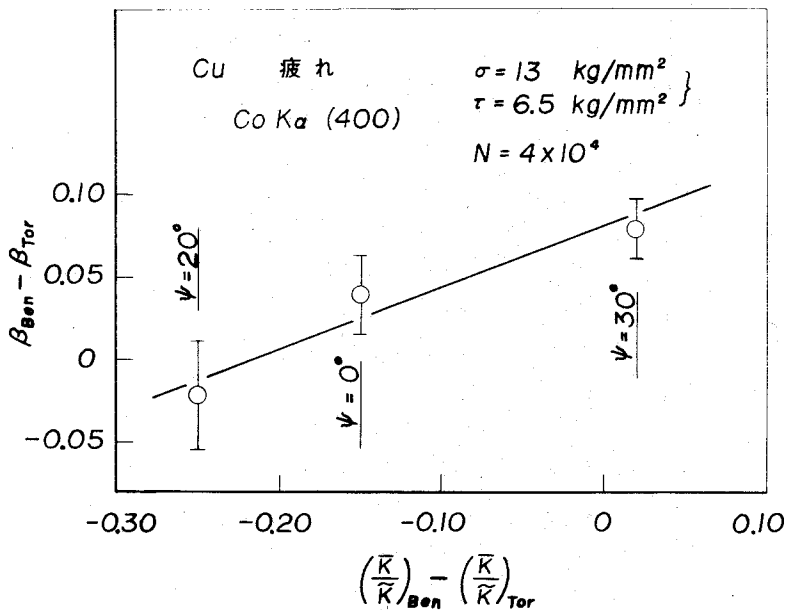


図1・26 加工硬化率と半価幅の関係

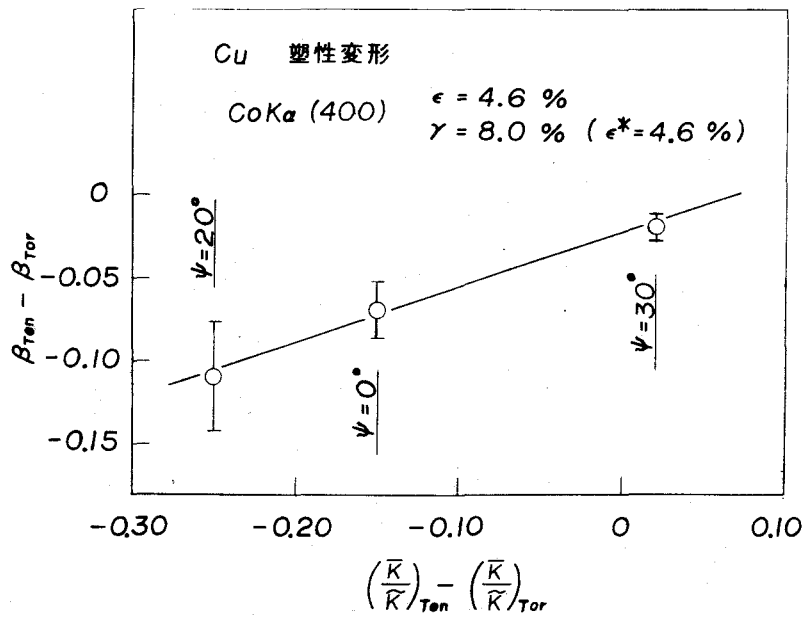


図1・27 加工硬化率と半価幅の関係

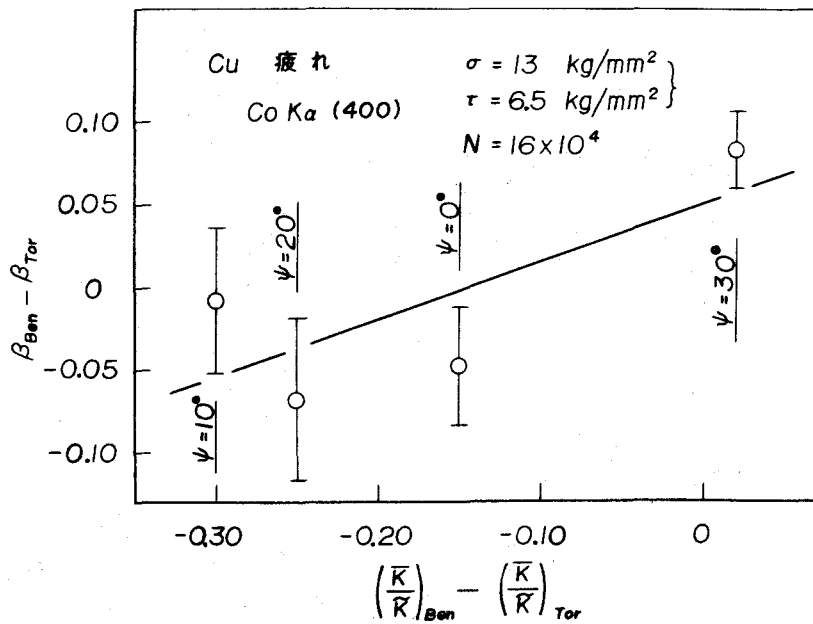


図1・28 加工硬化率と半価幅の関係

ここに示したように，加工硬化率  $K$  の方位依存性によって半価幅変化の回折面の方向による差異を整理できることから，高応力の領域では，多結晶中の各結晶粒の加工硬化が，単結晶のそれと同様な方位依存性を持っていることが推論される。また，疲れと塑性変形が類似の傾向をもつことは，両者における硬化の方位依存性が似ていることを示している<sup>(34)</sup>。

### 1・4・3 考 察

#### 1・4・3・1 応力値による疲れ機構の差異について

上にのべた結果は，多結晶銅の疲れにおいては，低い応力（破断繰返し数  $10^7$  前後）と高い応力（同じく  $10^5$  前後）とでは疲れの初期の硬化の様相が異なっていることを示している。すなわち，後者では繰返し応力下においても特定の方位の結晶では，多重すべりとそれにもとづく硬化が起こっていると考えられる。このような応力値による疲れの様相の差異は，Wood ら<sup>(27)</sup>によっても顕微鏡観察によって認められている。すなわち，応力の高い領域では subgrain の形成が著しいことが観察されているが，subgrain の形成は，一般に多重すべりによって起こりやすいことが知られており，<sup>(37)</sup> 本実験の結果と対応している。

#### 1・4・3・2 多結晶金属の加工硬化曲線について

従来から，多結晶の加工硬化曲線を単結晶についてのものから類推しようとする試みがいくつかなされているが，ここではさきの結果をこれらの試みと対比しながら少し検討してみる。

まず，Sachs model<sup>(23)</sup> および Kochendörfer model<sup>(39)</sup> においては多結晶体中の各々の結晶において働くすべり面を一つだけ考えている。またすべての方位の結晶についてその加工硬化曲線がせん断ひずみのみの関数で表わされること，すなわち  $\tau = \tau(r)$  を仮定している。さきの実験結果からすると，後者の仮定は Cu ではひずみが 4 % 程度以下の領域でのみ成立するが，それ以上のひずみでは加工硬化の異方性が現われ，この仮定は成立しない。



次に, Taylor model<sup>(40)</sup> および大矢根 model<sup>(41)</sup> においては, 上の model と異なって, 結晶粒の拘束による多重すべりを考えている。しかしながら,  $\tau = \tau(\sigma)$  の仮定はやはり用いられており, この意味からも Cu のように加工硬化の方位による差異の大きい材料よりも, むしろ Al などの方位依存性の小さい材料についてよりあてはまると考えられる<sup>(40)</sup>。

このようにみてくると, Cu など異方性の大きい材料では, 方位による加工硬化の差異を入れた model を考える必要があることがわかる。このような加工硬化の方位依存性は, 多重すべり (異なるすべり面上の転位の相互作用) によって生じたものと考えられ, 本来転位論によって解決されるべきものであるが, ここではこの点はさておき, 上の実験結果に対応して形式的に図 1・29 に示すような model を考えることができる。すなわち, この場合, 多結晶の変形応力  $\sigma$  は

$$\sigma = \tilde{K} \epsilon \dots\dots\dots (1 \cdot 10)$$

$$\sigma' = \sigma + k_1 d^{-1/2} \dots\dots\dots (1 \cdot 11)$$

のように表わされると考えられる。ここに,  $\tilde{K}$  はすべての方位に対する加工硬化率  $K$  の平均値であり, また (1・11) 式は結晶粒度の影響を示している<sup>(42)</sup> (ただし,  $k_1$  は定数,  $d$  は結晶粒直径)。すなわち, (1・10) (1・11) 式を同時に考慮することによって, 単結晶の変形応力と多結晶のそれとを結びつけることができると考えられる。

なお, 後に第 3 章において, 図 1・29 あるいは (1・10) 式で表わされる多結晶の変形 model にもとづいて, 多結晶の変形の問題に解析的な検討を加える。

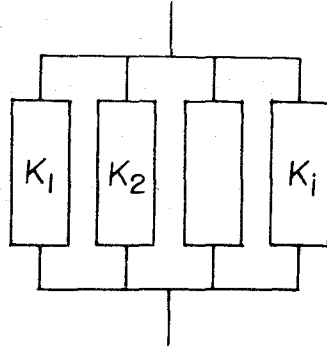


図 1・29 多結晶体の変形の model

(加工硬化の方位依存性が大きい場合)

## 1・5 結 言

以上の結果を要約すると次のようになる。

(1) 疲れ過程における X 線回折線半価幅変化の回折面依存性には，結晶の方位による因子，すなわち Schmid factor の影響があることを示した。回折にあずかる結晶粒についての Schmid factor の平均値を求めるには，ステレオ投影を用いる方法が容易である。

(2) 次にこの現象を応用して，疲れと塑性変形における多結晶中の各結晶粒の方位の影響について検討を加えた。その結果，比較的低い応力による疲れ（破断繰返し数  $10^7$  程度）では，多結晶中のすべりやすい方位を向いた結晶でおもに微視的変形が進む傾向が見られた。これに反して，塑性変形（ $\epsilon^* \approx 0.5 \sim 1.9\%$ ）では結晶粒の変形は方位によらずほぼ同様に生ずる性質があり，これは結晶粒相互の拘束に起因していると考えられる。これら結晶変形の様相の相異は組合せ応力下の降伏条件とも関係すると考えられる。

(3) 他方、応力の高い領域の疲れ（破断繰返し数  $10^5$  前後）では結晶の変形の様子，したがって疲れの機構が応力の低い場合とは異なっている。すなわち，後者では一重すべりが主であるが，前者では多重すべりによる硬化を生じている。また，多結晶中の各結晶粒の方位の影響は Schmid factor の差としてよりも，加工硬化係数  $K$  の方位による差異として現われる傾向がある。これはひずみの比較的大きい領域の塑性変形 ( $\epsilon^* \cong 4.6\%$ ) についても同様であって，このことから多結晶の変形の model を考える際にも，特に銅のように異方性の強い材料では  $K$  の方位依存性を考える必要がある。

## 1.6 付 録

先の 1.2 節では回折にあずかる結晶の Schmid factor の平均値を図式的方法によって求めたが，これはすべり系が複雑でない場合には計算によっても求めることができる。たとえば，bcc 金属には  $\{110\}$ ， $\{112\}$ ， $\{123\}$  の 3 種のすべり面があるが，これらのそれぞれに対する Schmid factor の平均値は次のようにして求まる。

今，回折面の方向を座標軸の一つにとって直角座標で表わすと，応力軸（試料軸）の方向はパラメータ  $\lambda$  で表わされる。（図 1.30 (a)）。一般には，ある  $\lambda$  の値 ( $\lambda_{i-1} \leq \lambda \leq \lambda_i$ ) に対してあるすべり面が最大せん断応力の働く面となり，その面に対する  $\mu_{\text{Ten}}^{(i)}$  が結晶の方位関係と (1.1) 式から求まる。したがって，回折にあずかる結晶についての平均値は，

$$\overline{\mu_{\text{Ten}}} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} \mu_{\text{Ten}}^{(i)} d\lambda \right\} \dots\dots\dots (1.12)$$

ただし， $\lambda_0 = 0$ ， $\lambda_n = 2\pi$

で求めることができる。

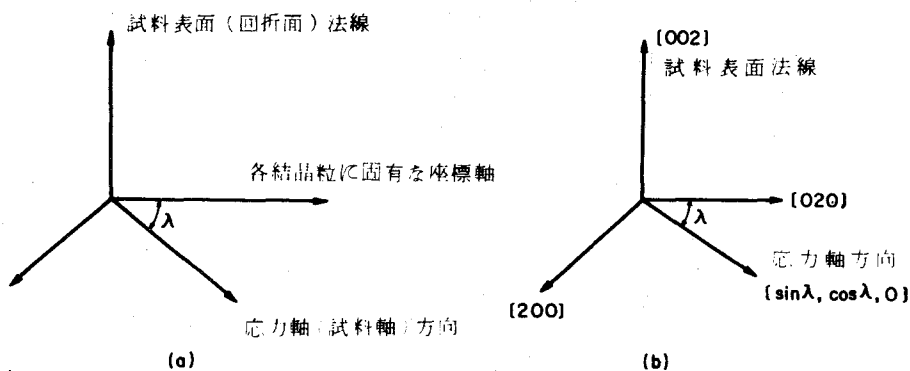


図1・30 応力軸と結晶軸の関係

具体的な計算の一例として、(200) 回折面のとき  $\{110\}$  すべり系について考える。図1・30 (b)において〔002〕方向を試料表面に垂直にとり、また簡単のため〔200〕および〔020〕を座標軸にとる。引張軸方向はパラメータ  $\lambda$  を用いて  $[\sin \lambda, \cos \lambda, 0]$  と表わされる。 $\{110\}$  面すべりの場合は、その対称性から(1・12)式は  $0 \leq \lambda \leq \pi/4$  の区間を考えれば充分である。図のような配置のとき、いくつかのすべり面の中で  $\mu_{\text{Ten}}$  の最大値を与えるのは(011)面  $[\bar{1}11]$  方向のすべりのときである。二つの方向のなす角がその内積で表わされることから、(1・1)式において

$$\cos \theta_o = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \lambda$$

$$\cos \theta_d = \frac{1}{\sqrt{3}} (\cos \lambda + \sin \lambda)$$

となり、したがって(1・12)式より、

$$\overline{\mu_{\text{Ten}}} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} \mu_{\text{Ten}} d\lambda = 0.464 \dots\dots\dots (1.13)$$

このようにして求めた結果を表1・6に示す。なお、表1・6の右端の欄は三つのすべり面のそれぞれに対する  $\overline{\mu'_{Ten}}$  の中の最大の値  $\overline{\mu_{Ten}}$  を示しているが、これは先に図式的に求めた値(表1・1)とよく対応している。

表1・6 各回折面に対する  $\overline{\mu'_{Ten}}$  の計算値(bcc金属)

回折面	$\overline{\mu'_{Ten}}$			$\overline{\mu_{Ten}}$
	すべり面			
	{110}	{211}	{321}	
(200)	0.464	0.468	0.482	0.482
(310)	0.416	0.469	0.358	0.469
(211)	0.363	0.444	0.460	0.460
(110)	0.401	0.433	0.435	0.435

## 文 献

- (1) 平, 本田, 機械学会論文集, 26-167(昭35), 926.
- (2) 平, 本田, 松木, 機械学会論文集, 28-194(昭37), 1335.
- (3) 平, 本田, 阿部, 材料試験, 11(昭37), 699.
- (4) G. B. Greenough, Prog. in Metal Phys., 3(1952), 176.
- (5) B. E. Warren, Prog. in Metal Phys., 8(1959), 147.
- (6) 仁田編, "X線結晶学"上巻(1959), 下巻(1961), 丸善,
- (7) H. P. Klug and L. E. Alexander, "X-Ray Diffraction Procedures", (1954), John Wiley & Sons.
- (8) D. M. Vasilev and B. I. Smirnov, Soviet Phys, 4(1961), 226.

- (9) F. W. Jones, Proc. Roy. Soc. (London), A166 (1938), 16.
- (10) A. R. Stokes and A. J. C. Wilson, Proc. Phys. Soc., 56 (1944), 174.
- (11) B. E. Warren and B. L. Averbach, J. Appl. Phys., 21 (1950), 595.
- (12) N. J. Horden and B. L. Averbach, Acta Met., 9 (1961), 237.
- (13) P. B. Hirsch and H. M. Otte, Acta Cryst., 10 (1957), 447.
- (14) R. Hartmann and E. Macherauch, Z. Metall. 54 (1963), 197.
- (15) P. Rama Rao and T. R. Anantharaman, Z. Metal., 54 (1963), 658.
- (16) G. B. Greenough, Nature, Lond., 160 (1947), 258.
- (17) C. S. Barrett, "Structure of Metals", (1952), McGraw-Hill
- (18) B. D. Cullity, "X線回折要論", (1961), アグネ.
- (19) 山本, 金属物理, 6 (1960), 118.
- (20) E. A. Calnan and J. B. Clews, Phil. Mag., 42 (1951), 616.
- (21) C. R. Smoluchowski and A. J. Opinski, Carnegie Inst. of Tech. Conference on Plastic Def. of Crystalline Solids, (1950).
- (22) D. P. Koistinen and R. E. Marburger, Trans. ASM, 51 (1959), 537.
- (23) G. Sachs, VDI-Z, 72 (1928), 734.
- (24) 平, 小寺沢, 安藤, 材料, 12 (昭38), 154.
- (25) 小沼, 日本金属学会誌, 29 (昭40), 12.
- (26) 山本, 渡辺, "金属材料の強度と破壊", (昭39), 269, 丸善.
- (27) W. A. Wood, S. Mck. Cousland and K. R. Sargant, Acta Met., 11 (1963), 643.
- (28) P. J. E. Forsyth, Acta Met., 11 (1963), 703.

- (29) 堀, 波木, 第10回材料の強度と疲労シンポジウム前刷, (昭40), 1.
- (30) 河本, "金属の疲労". (昭37), 179, 朝倉書店.
- (31) A. Nadai, "Theory of Flow and Fracture of Solids",  
(1950), McGraw-Hill.
- (32) P. G. Forrest, "Fatigue of Metals", (1962), 111,  
Pergamon Press.
- (33) G. I. Taylor and H. Quinney, Phil. Trans. Roy. Soc.,  
A230 (1931), 323.
- (34) D. S. Kemsley and M. S. Paterson, Acta Met., 8 (1960),  
453.
- (35) H. S. Choi, C. W. Allen and B. D. Cullity, Trans. AIME,  
227 (1963), 331.
- (36) P. Charsley and N. Thompson, Phil. Mag., 3 (1958), 1098.
- (37) J. C. Grosskreutz and P. Waldow, Acta Met., 11 (1963),  
717.
- (38) E. Macherauch, Z. Metallkde, 55 (1964), 60.
- (39) A. Kochendörfer, "Plast. Eigenschaften von Metallen und  
metallischen Werkstoffen", (1941), Springer.
- (40) G. I. Taylor, J. Inst. Met., 62 (1938), 307.
- (41) 大矢根, 小島, 機械学会誌論文集, 21-111 (昭30), 817.
- (42) N. J. Petch, J. Iron and Steel Inst., 174 (1953), 25.

## 第2章 多結晶金属の降伏条件の解析

### 2・1 緒 言

#### 2・1・1 ま え が き

一般に，機械工学的な立場から多軸応力下の金属材料の変形や強さを取扱うのは塑性力学によってであるが，塑性力学はその基礎として，主として数学的に導入された降伏条件を仮定している。たとえばそれは一般的な形として次のように与えられる。<sup>(1)</sup>

$$f(J_2', J_3') = 0 \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 1)$$

(ここに， $J_2'$  および  $J_3'$  はそれぞれ偏差応力成分についての応力テンソルの第2および第3の不変量である。) これらの降伏条件は等方性及び連続体の仮定の下に導き出されたものであるが，他方転位の動きによるすべりは結晶形によりそれぞれ特定のすべり面，すべり方向を持ち，異方性を持っている<sup>(2)</sup> (表 2・1)。このような二つの考え方，塑性力学と結晶学的なすべり，

表 2・1 すべり面およびすべり方向の数

	す べ り 面		す べ り 方 向	
bcc	{110} {112} {123}	42	<111>	4
fcc	{111}	4	<110>	6
hcp	{0001}	1	<1120>	3

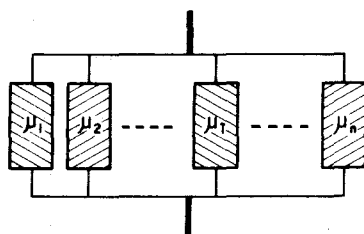
の間には，直接的な理論的結びつきはない。たとえば，fccとbccの結晶形の差異が降伏条件にどう響くか等の点については塑性力学は言及していない。

塑性力学において数学的に導入された降伏条件は，その妥当性が実験により裏付けられ，実際の設計に対しては十分実用的なものである。しかしなが



ら他方，材料の変形あるいは強さの問題を本質的に材料の微視的構造変化から理解しようとする場合，これらの数学的な降伏条件は必ずしも有効ではない。なぜなら，元来それらは材料の物性論的な挙動に基づいて導き出されたものではなく，微視的な材料の変化と対応するものではないからである。したがって，金属材料の変形をより深く，かつ現象に密着して理解するためにも，これらの点に対する考察が必要であると考えられる<sup>(3)</sup>。

そこで本章では，基礎的な問題として降伏条件をとり上げ，これを結晶のすべりの観点から種々の結晶形について検討する。降伏条件は，元来金属材料が種々の方位を持つ結



$$\sigma_{\text{poly}} = \frac{1}{\bar{\mu}} \tau_s, \quad \bar{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i$$

図 2・1 多結晶体の変形 model

晶粒の集まりであるという性格と密接な関連を持っている。Sachs<sup>(4)</sup>は図2・1に示すような並列的な多結晶の変形modelを用い，fcc金属についてSchmid factorと降伏条件の関係の数値的な検討を行なったが，第

1章でのべたように，Sachs modelは比較的小さい領域で妥当なものである。

### 2・1・2 考 え 方

一般に多軸応力下の降伏条件を調べるには，引張りとねじりの組合せ<sup>(5)</sup>内圧円筒<sup>(6)(7)</sup>などの方法があるが，ここでは最も簡単な純引張りとなじりの場合について降伏条件を

(a) 結晶のすべりから

(b) 塑性力学から

検討して両者を比較する<sup>(4)</sup>。

(a) 結晶学的に考えるとすべり面に働くせん断応力  $\tau_s$  は、第1章の(1・1)，(1・2)式でのべたように、

$$\left. \begin{aligned} \tau_s &= \mu_{\text{Ten}} \sigma && (\text{引張応力の場合}) \\ \tau_s &= \mu_{\text{Tor}} \tau && (\text{ねじり応力の場合}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2 \cdot 2)$$

で与えられる。一般に金属結晶にはいくつかのすべり面，すべり方向がありそのおのおのに対してそれぞれ  $\mu$  の値が与えられるが，一つの結晶粒内のすべりはまず  $\mu$  の最大の値を持つすべり面，すべり方向に起こると考えられるので，以下においてはこの最大の  $\mu$  について考えるものとする。

以上は個々の結晶粒についての問題であるが，次に結晶粒の集合としての多結晶体の場合を考える。ここで仮定として，(i)すべての方位の結晶について変形に必要なすべり面上のせん断応力(臨界せん断応力)  $\tau_0$  が等しい，(ii)臨界せん断応力  $\tau_0$  が引張変形とねじり変形とで同じ値をとる，(iii)結晶の変形は方位係数  $\mu$  をあらゆる可能な方位の結晶について平均した値  $\tilde{\mu}$  によって決定される，とおく。(これは Sachs model に対応する。)

このような仮定をおくと，先に(1・8)式にも示したように，(2・2)式から

$$\frac{\tau}{\sigma} = \frac{\tilde{\mu}_{\text{Ten}}}{\tilde{\mu}_{\text{Tor}}} \dots\dots\dots (2 \cdot 3)$$

となり，引張りとねじりの降伏応力の比  $\tau/\sigma$  を Schmid factor  $\mu$  によって表わすことができる<sup>(4)</sup>。

(b) 塑性力学的に見ると，(2・1)式を引張りとねじりの組合せ応力の場合について具体的に当てはめた降伏条件式として，

$$\sqrt{\sigma^2 + A\tau^2} = K \quad (K: \text{定数}) \dots\dots\dots (2 \cdot 4)$$

がある。ここに von Mises の法則では  $A=3$ ，Tresca の法則では  $A=4$  である。よく知られているように，種々の降伏条件式の中では，金属に対しては，von Mises の条件(せん断ひずみエネルギー説)あるいは Tresca

の条件（最大せん断応力説）が比較的よく当てはまる<sup>(1)</sup>。（2・4）式から  
 応力比は、

$$\frac{\tau}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{A}} \dots\dots\dots (2 \cdot 5)$$

で与えられる。すなわち  $\tau/\sigma$  の値は von Mises では 0.577, Tresca  
 では 0.500 となる。

結局、（2・3）式と（2・5）式から得られる値を数値的に比較すること  
 によって、塑性力学の降伏条件(b)と、物理的な像としての結晶のすべり(a)  
 との対応を考えることができる。この目的のためには、（2・3）式の右辺  
 のあらゆる可能な方位の結晶についての方位係数の平均値  $\bar{\mu}$  を求める計算が  
 必要である。

## 2・2 bcc 金属の場合

### 2・2・1 ま え が き

bcc金属はすべり系の数が多いため複雑であるが、ここではまずステレオ  
 投影を用いて、比較的簡単に平均値  $\bar{\mu}$  を求めることを試みる。すなわち、ま  
 ずそれぞれの結晶方位に対する  $\mu$  の値を計算で求め、それをもとにしてステ  
 レオ投影上に  $\mu$  の分布図を描き、これを図式的に平均することによって平均  
 値  $\bar{\mu}$  を得ることができる。

引張りの場合の  $\mu_{\text{Ten}}$  の分布は Calnan<sup>(8)</sup> らによって、すでに計  
 算されているが（図1・9），ねじりの方位係数  $\mu_{\text{Tor}}$  の分布は未だ求めら  
 れていない。そこで次に  $\mu_{\text{Tor}}$  の分布をステレオ投影上に求める。

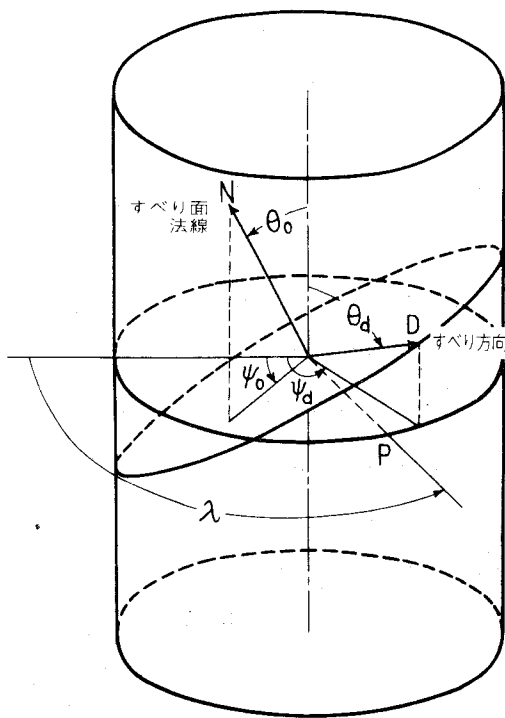


図 2・2 円柱試験片のねじり

### 2・2・2 Schmid factorの計算（ねじり）

ある方位を向いた結晶にねじり応力が加わったとき，図 2・2 の P 点において法線  $N$  を持つすべり面上の  $D$  なるすべり方向に働くせん断力  $\tau_s$  は次のように表わされる<sup>(9)(10)</sup>。(ただし，ここに  $\tau$  に最大せん断応力，すなわち負荷応力)。

$$\frac{\tau_s}{\tau} = \sin \theta_0 \cos \theta_d \sin(\varphi_0 - \lambda) + \cos \theta_0 \sin \theta_d \sin(\varphi_d - \lambda) \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 6)$$

ここに， $\lambda$  は試験片円周上の結晶粒の位置を示す角であって，言いかえる

と結晶軸に対する応力軸の方向を示す角である（図 2・2）。

bcc 金属（ $\alpha$ 鉄）の場合，すべり方向は $\langle 111 \rangle$ 方向であるが，すべり面は $\{110\}$ 面， $\{112\}$ 面， $\{123\}$ 面の3種があり，面の数は合計42に，すべり系は48に達する（表2・1）。したがって，それらすべてについて（2・6）式の計算を行なうのは困難である。しかしながら，Gough<sup>(9)</sup>によれば，bcc金属のねじり変形においては，（2・6）式から $\lambda$ に対する $\tau_s/\tau$ の分布を求めるのに，bccの48個のすべり系全部について計算しそれらの最大値をとるかわりに，数学的なせん断応力最大の面を考え（これは pencil glide と呼ばれる），それについて計算を行なうことでよく近似されることが知られている（誤差は1%以下）。

図 2・2において

$$\cot \theta_d = -\tan \theta_o \cos (\varphi_d - \varphi_o) \dots\dots\dots (2 \cdot 7)$$

の関係がある。（2・7）式を（2・6）式に代入して $\theta_o$ を消去し，さらに数学的最大応力の面を考えると，

$$\frac{d(\tau_s/\tau)}{d\varphi_o} = 0 \dots\dots\dots (2 \cdot 8)$$

の関係があるから，これを再び（2・6）式に代入して整理すると<sup>(9)</sup>，

$$\mu_{\text{Tor}} = \frac{\tau_{\text{max}}}{\tau} = \left\{ \cos^2 \theta_d \cos (\varphi_d - \lambda) + \cos^2 2\theta_d \sin^2 (\varphi_d - \lambda) \right\}^{1/2} \dots\dots\dots (2 \cdot 9)$$

の関係が得られる。これが目的の式である。

次にこの式から四つのすべり方向， $[111]$ ， $[11\bar{1}]$ ， $[1\bar{1}1]$ ， $[\bar{1}11]$  についてそれぞれ $\lambda$ を $0^\circ$ から $360^\circ$ まで変化させたときの（2・9）式で表わされる $\mu_{\text{Tor}}$ の変化を求め（実際には対称性から $0 \leq \lambda \leq 180^\circ$ でよい），その最大のものについて平均すれば $\mu_{\text{Tor}}$ の $\lambda$ に対する平均値 $\overline{\mu_{\text{Tor}}}$ が得られる。

次に、 $\overline{\mu_{\text{Tor}}}$  の値の方位による分布をステレオ投影の基本三角形上に示す必要がある。(100) および (010) から測った角を  $\alpha_1$  および  $\alpha_2$  とし

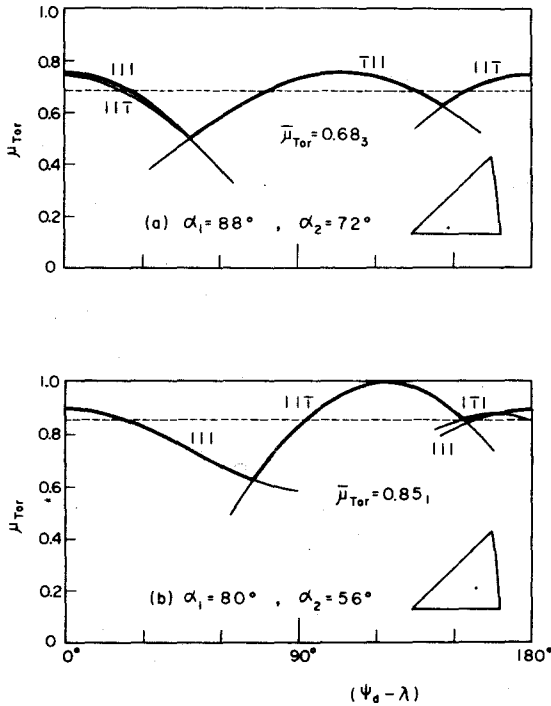


図 2・3  $\lambda$  による  $\mu_{\text{Tor}}$  の変化の例

について図式的に平均することによって  $\lambda$  に対する平均値  $\overline{\mu_{\text{Tor}}}$  を得る。

$\overline{\mu_{\text{Tor}}}$  の等高線を描いた結果を図 2・4 に示す。なお、 $\overline{\mu_{\text{Tor}}}$  の最大値が  $[\bar{1}11]$  方向において 1.000 となるのは、すべり方向のみを考えたためである。

たとき、 $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$  のおのおのに対して  $4^\circ$  間隔（一部  $2^\circ$  間隔）の方位をステレオ三角形内に選び、それらの点のそれぞれについて  $\overline{\mu_{\text{Tor}}}$  を求める。すなわち、各点に対応して  $\theta_d$  および  $\varphi_d$  が定まり、先にのべたように (2・9) 式から  $\mu_{\text{Tor}}$  の値を計算することができる。

(2・9) 式から求めた  $\mu_{\text{Tor}}$  と  $\lambda$  の関係の例を図 2・3(a) および (b) に示す。

図に示される  $\mu_{\text{Tor}}$  の変化を、その最大のもの

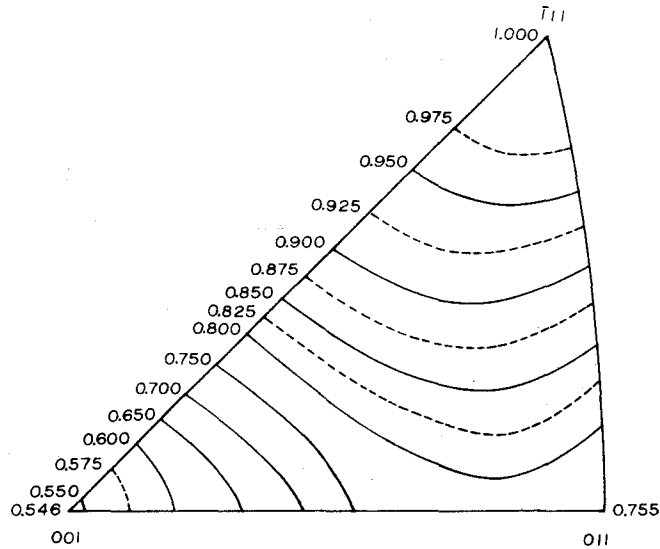


図 2・4      bcc 金属の " $\overline{\mu}_{\text{Tor}} = \text{一定}$ " の曲線

### 2・2・3      計 算 結 果

$\overline{\mu}_{\text{Tor}}$  の分布 (図 2・4) および  $\mu_{\text{Ten}}$  の分布 (図 1・9) を図式的に平均すると, すべての方位についての Schmid factor の平均値を得ることができる。(なおこの際, ステレオ投影の性質上投影によって面積は変化するので, この点は補正して一様分布に対する  $\mu$  の平均値を求めた。)

#### 2・2・3・1      結晶方位が一様に分布する場合

まず結晶の方位分布が一様である場合について平均値を求めると, 引張りおよびねじりについてそれぞれ図 1・9 および 2・4 から

$$\tilde{\mu}_{\text{Ten}} = 0.472 \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 10)$$

$$\tilde{\mu}_{\text{Tor}} = 0.824 \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 11)$$

したがって, (2・3) 式より

$$\frac{\tau}{\sigma} = \frac{\tilde{\mu}_{\text{Ten}}}{\tilde{\mu}_{\text{Tor}}} = 0.573 \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 12)$$

## 2・2・3・2 優先方位を持つ場合

ところで、一般に引張り変形や圧延などを受けた材料は異方性を持っており、塑性力学においてもこの異方性に対する検討が行なわれている<sup>(1)</sup>。ここで行なった結晶学的な降伏条件の計算においても材料の方位の異方性（優先方位）の問題を取入れることが可能である。

$\alpha$ 鉄の引張変形および圧延によって生じる優先方位は変形状態で $[110]$ 、焼鈍状態で $[110]$ あるいは $[100]$ であることが知られている<sup>(2)</sup>。そこでまず、 $[110]$ 優先方位の場合（すなわち、試験片軸方向に $[110]$ が優先する場合）について、 $[110]$ 方位をもつ結晶の数と $[100]$ あるいは $[111]$ 方位を持つ結晶の数の比が4, 2の場合について、これらの方位の間では方位の分布は方位角にしたがって直線的に変化するものと仮定してそれぞれ $\tau/\sigma$ の値を求めると表2・2のようになる。すなわち、 $\tau/\sigma$ の値

表 2・2 結晶方位分布の不均一性と  $\tau/\sigma$  の値の関係（bcc 金属）

	均 一 分 布	優 先 方 位 を も つ 場 合					
		$\frac{[110]}{[100]}$ および $\frac{[110]}{[111]}$		$\frac{[100]}{[111]}$			
		4	2	4	2	1/2	1/4
$\bar{\mu}_{Ten}$	0.47 <sub>2</sub>	0.47 <sub>8</sub>	0.47 <sub>5</sub>	0.47 <sub>8</sub>	0.47 <sub>6</sub>	0.47 <sub>0</sub>	0.46 <sub>7</sub>
$\bar{\mu}_{Tor}$	0.82 <sub>4</sub>	0.82 <sub>3</sub>	0.82 <sub>3</sub>	0.79 <sub>8</sub>	0.81 <sub>0</sub>	0.83 <sub>7</sub>	0.84 <sub>7</sub>
$\tau/\sigma$	0.57 <sub>3</sub>	0.58 <sub>0</sub>	0.57 <sub>7</sub>	0.59 <sub>9</sub>	0.58 <sub>7</sub>	0.56 <sub>1</sub>	0.55 <sub>1</sub>

は $[110]$ 優先方位によってやや大きくなる傾向を持つ。（なおここで、異方性として結晶方位の分布についてだけ考えたが、加工材の場合にはこの他に方位による加工硬化の異方性もあると考えられる。）

次に $[100]$ 優先方位についても、同じく直線的分布を仮定して、 $[100]$ 方位を向いた結晶の数と $[111]$ 方位を向いた結晶の数の比が4, 2のおの



おのの場合について計算した  $\tau/\sigma$  の値を同じく表 2・2 に示す。(なお、参考のためこの比の値が  $1/2$ ,  $1/4$  の場合についても同時に示した。) これらの結果はいずれも, bcc 金属の引張りおよび圧延の優先方位においては, 等方性の場合よりも  $\tau/\sigma$  の値が大きくなることを示している。

#### 2・2・4 ま と め

以上のように, 降伏条件は材料の方位分布によっても影響を受けると考えられるが, これはここでのべたような考え方によってのみはじめてその相関性が明らかにされる性質のものである。このような問題は実際の場合にも, 大きな加工を受けた材料や深絞り性を向上させるため方位を調整して作られた材料<sup>(11)</sup> などにおいては考慮する必要がある場合があると思われる。

なお, 先の  $\bar{\mu}$  の計算では結晶粒の数が無限個あると考えていたが, 結晶粒の数の少ないときは, このような方位の問題が降伏応力を求める際の実験データのばらつきとして現われることが予想される。

### 2・3 hcp 金属の場合

#### 2・3・1 ま え が き

上の bcc 金属の場合に引続いて, 本節ではすべり面やすべり方向の数の極端に少ない hcp (稠密六方) 金属の場合について, 同じく結晶のすべりと降伏条件の関係を求める。まず hcp 金属の結晶構造とその代表的な例を図 2・5 および表 2・3 に示す。図 2・5 において, a, c はそれぞれ hcp 構造の a 軸および c 軸方向の原子間距離である。

表 2・3 hcp 金属の例

金 属	z	c/a
Be	4	1.57
Mg	12	1.62
Ti	22	1.59
Zn	30	1.86
Cd	48	1.89

z : 原子番号

hcp 金属の基本的なすべり面は (0001) 面である (これは basal plane と呼ばれている)。すべり方向は図 2・5 に

示すような三つの方向，

$a_1 [2\bar{1}\bar{1}0]$ ,  $a_2 [\bar{1}2\bar{1}0]$ ,  $a_3 [\bar{1}\bar{1}20]$  である。

従来，hcp 金属を結晶塑性の立場から取扱った報告は，きわめて少ない<sup>(12)</sup>。しかし，hcp 金属の中でもチタンやベリ

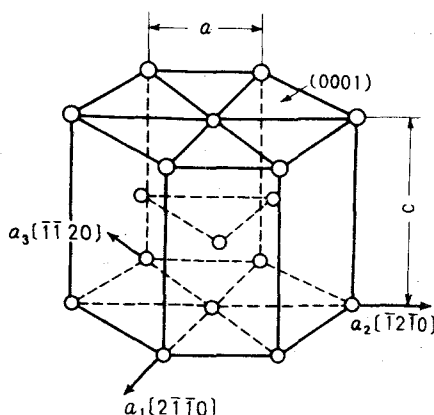


図 2・5 hcp 結晶の構造と (0001) 面上のすべり方向

リウムは強度部材として用いられることも多く，また金属学的研究にはしばしば hcp が用いられる<sup>(13)</sup>ことから，hcp 金属の降伏条件について検討を加えることは意義があると考えられる。

ところで，実際の hcp 金属では条件によっては (0001) 面上すべり (basal slip) 以外に，他の面上のすべり (prismatic slip, pyramidal slip など) が起こることもあり，また一般に双晶による変形もしばしば起こることが知られている。しかしながら，降伏点近傍のひずみの少ない領域では，顕微鏡観察によっても知られているように比較的簡単なすべりが支配的であると考えられるので，ここでは (0001) 面のみですべる理想化された hcp 金属の場合を取扱うことにする。(なお，上記のすべり，双晶などの影響については，後に 2・5 節で考察を加える。)

以下においては，hcp 金属の降伏条件をまず図式計算によって求め，次いで同じく積分による計算によって求める方法を開発する。

### 2・3・2 図式的方法による計算

hcp 金属ではすべり方向が三つあるが (図 2・5)，以下においてはその各々に対する  $\mu$  の内の最大の値をその結晶粒の Schmid factor の値とする。次に，この Schmid factor の分布をステレオ投影上に求める

が、これは結晶塑性の問題を実験的に、たとえばX線を用いて検討する際の基礎としても有用なものである。

hcp の結晶構造は立方晶にくらべてステレオ投影上の取扱いはやや複雑となるが、一例として(0001)標準投影図を亜鉛(Zn)について示したものが図2・6<sup>(2)</sup>である。結晶の対称性から考えて、以下においては図2・6の実線で示した三角形の部分を選ばしめて、この三角形内の方位係数 $\mu$ の分布を求める。

hcp 結晶では $(h_1 \ k_1 \ l_1)$ 面と $(h_2 \ k_2 \ l_2)$ 面の間の角 $r$ は

$$\cos r = \frac{h_1 h_2 + k_1 k_2 + \frac{1}{2} (h_1 k_2 + h_2 k_1) + \frac{3a^2}{4c^2} l_1 l_2}{\sqrt{(h_1^2 + k_1^2 + h_1 k_1 + \frac{3a^2}{4c^2} l_1^2)(h_2^2 + k_2^2 + h_2 k_2 + \frac{3a^2}{4c^2} l_2^2)}} \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 13)$$

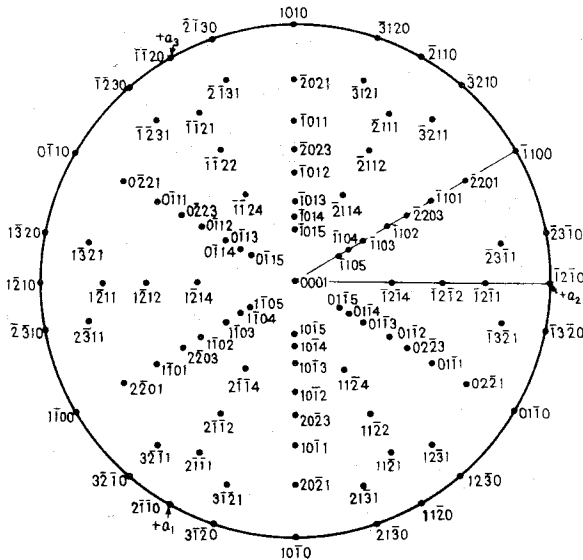


図 2・6 亜鉛(六方晶  $c/a = 1.86$ ) の標準(0001)投影(Barrett による)

で与えられる<sup>(14)</sup>。ここに $a$ 、 $c$ は図2・5に示した原子間距離である(なお、よく知られているように、hcp 結晶の面表示 $(hikl)$ においては、 $h + k = -i$ の関係がある)。

ところで、Schmid factorは引張りの場合には(1・1)式と同じく、

$$\mu_{Ten} = \cos \theta_o \cdot \cos \theta_d \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 14)$$

で与えられる。

そこで、ステレオ三角形上に  $(1010)$  および  $(0001)$  から測ってそれぞれ  $4^\circ$  間隔の軌跡を描き、両者の軌跡の各交点について考える。引張りの場合は  $(2 \cdot 13)$ ,  $(2 \cdot 14)$  式から  $\mu_{Ten}$  をそれぞれ hcp の三つのすべり方向について求め、その最大のものをもって、その方位の結晶に対する  $\mu_{Ten}$  の値とする。同じくねじりの場合には、 $(2 \cdot 6)$ ,  $(2 \cdot 7)$ ,  $(2 \cdot 13)$  式から、 $\lambda$  のそれぞれの値について、三つのすべり方向のおののに対する

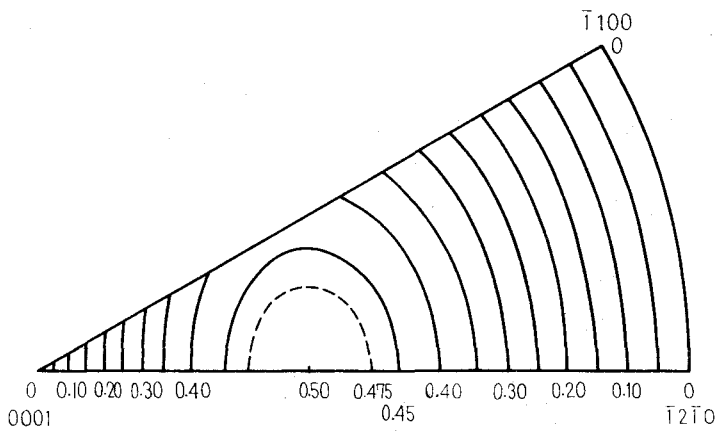


図 2・7 hcp 金属の " $\mu_{Ten} = \text{一定}$ " の曲線

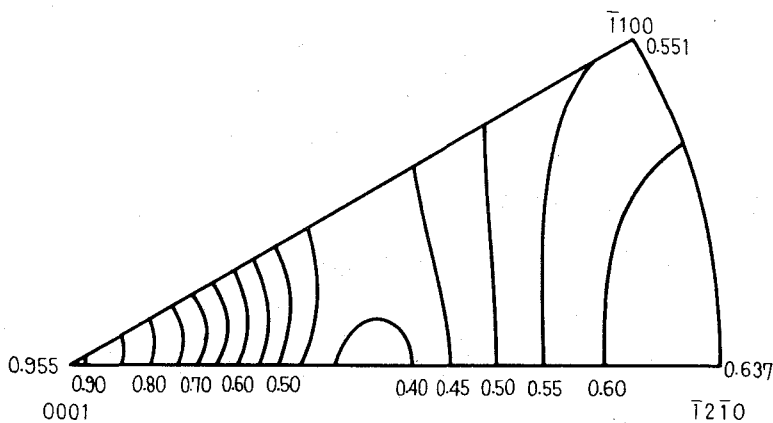


図 2・8 hcp 金属の " $\mu_{Tor} = \text{一定}$ " の曲線

$\mu_{\text{Tor}}$  を求め、その中の最大の値をとるように注意しながら  $\lambda$  について積分して平均値  $\bar{\mu}_{\text{Tor}}$  を得る（ここに、 $\bar{\mu}_{\text{Tor}}$  は  $\lambda$  についての  $\mu_{\text{Tor}}$  の平均値で、その具体的な計算方法については、付録 2・7・1 でのべる）。

このようにして得られたステレオ三角形内の  $4^\circ$  目盛の基盤の網目上の各交点に対する Schmid factor  $\mu$  の値をもとにして、 $\mu$  の等高線を描いた結果を、引張りおよびねじりの場合についてそれぞれ図 2・7 および図 2・8 に示す。

結晶方位の分布が一樣であるという仮定の下に、あらゆる可能な方位についての  $\mu$  の平均値  $\tilde{\mu}$  を求めるには、前節と同様に図 2・7、図 2・8 に示す等高線をそれぞれ図式的に積分して平均する。その結果、

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mu}_{\text{Ten}} &= 0.318 \\ \tilde{\mu}_{\text{Tor}} &= 0.538 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.15)$$

が得られる。

したがって、(2・3) 式から hcp 多結晶体の降伏応力比として、

$$\frac{\tau}{\sigma} = \frac{\tilde{\mu}_{\text{Ten}}}{\tilde{\mu}_{\text{Tor}}} = 0.59, \dots\dots\dots (2.16)$$

を得る。

### 2・3・3 積分による計算

一般に、Schmid factor  $\mu$  の平均値  $\tilde{\mu}$  を求める際に図式的方法に頼る必要があったのは、いくつかのすべり面、すべり方向の中で最大の  $\mu$  の値を持つものを各方位の結晶ごとに選び出すという繁雑な操作を必要としたからである。しかしながら、hcp 金属の場合はすべり面が一つであることから、比較的簡単に  $\tilde{\mu}$  を積分による計算によって求めることができる。

$$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \quad \tilde{\mu}_{\text{Ten}}$$

引張りの場合、まず図 2・5 に示した三つのすべり方向の中で  $\mu_{\text{Ten}}$  の値の最大のものを選び出すことを考える。そのために、図 2・9 に示したような角  $\alpha$  を導入し、(2・14) 式を書変える ( $\alpha$  はすべり面上で最大傾斜方向とすべり方向のなす角である)。すなわち、図 2・9 において

$$\cos \theta_d = \sin \theta_o \cdot \cos \alpha \quad \cdots \cdots (2 \cdot 17)$$

の関係があるから、これを用いると (2・14) 式は

$$\mu_{\text{Ten}} = \sin \theta_o \cos \theta_o \cos \alpha \quad \cdots \cdots (2 \cdot 18)$$

となる。

さて、結晶粒の方位が一樣に分布するという仮定は、図 2・9 に示した単位球の表面上で方位の分布が一樣であることと対応する。そこで今、結晶軸を座標軸にとって考えると、試験片軸の方位は傾きが  $\theta_o$  のとき、図 2・9 に示した  $d\theta_o$  の区間の単位球上に作る表面積 (斜線部分)  $2\pi \sin \theta_o$

$d\theta_o$  に分布することになる。したがって、 $\mu_{\text{Ten}}$  を  $\alpha$ 、 $\theta_o$  について積分する際にはこの重みをかける必要がある (なお、重み  $\sin \theta_o$  は一般に球

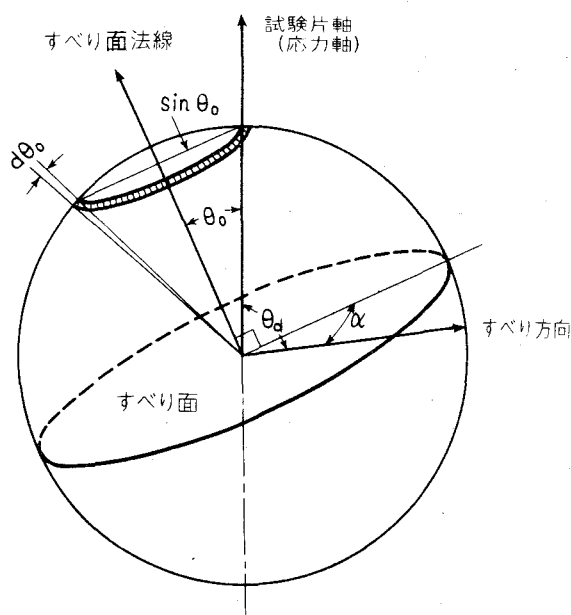


図 2・9 結晶軸と応力軸の方位関係 (引張りの場合)

座標における積分で用いられるものである<sup>(15)</sup>。すなわち、(2・18)式より、

$$\tilde{\mu}_{\text{Ten}} = \frac{2\pi \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/6} \sin\theta_0 \cdot \mu_{\text{Ten}} d\alpha d\theta_0}{2\pi \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/6} \sin\theta_0 d\alpha d\theta_0} = 1/\pi = 0.318$$

.....(2・19)

となる。〔ここで $\alpha$ の積分範囲を0から $\pi/6$ までにとったのは、 $\mu_{\text{Ten}}$ を最大にするように $\alpha$ の区間を選んだためである。なお、すべり方向は三つあるので、 $\alpha$ の区間としては $\pi/3$ をとるべきであるが、ここでは(2・18)式の形が $\alpha$ の正負に対して対称的であるため $\pi/6$ の区間をとった〕。(2・19)式の値は先にステレオ投影によって求めた(2・15)式の値と全く一致している。

$$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \quad \tilde{\mu}_{\text{Tor}}$$

ねじりの場合は引張りの場合に比べて応力状態が2軸であるためやや複雑となる。まず、先と同じく角 $\alpha$ を導入し(図2・10)、(2・6)式を変形する。すなわち、式中の $\theta_d$ 、 $\varphi_d$ を $\theta_0$ 、 $\alpha$ で表わす。今の場合すべり面は一つだけであり、 $\varphi_0$ は任意にとって良いから、簡単のため $\varphi_0 = 0$ とする。(2・17)式および(2・7)式を(2・6)式に代入し、 $\theta_d$ 、 $\varphi_d$ 、 $\varphi_0$ を消去すると、

$$\mu_{\text{Tor}} = \cos 2\theta_0 \cos\alpha \sin\lambda + \cos\theta_0 \sin\alpha \cos\lambda$$

.....(2・20)

を得る。

さて次に、すべての方位の結晶についての $\mu_{\text{Tor}}$ の平均を求めるために、(2・20)式を $\lambda$ 、 $\alpha$ 、 $\theta_0$ の三つの変数について積分する必要があるが、この積分を遂行するに当たって次の2点に注意する必要がある。(1)すべり面、すべり方向がいくつかある場合、最大応力を受けるすべり面あるいはすべり

方向を選び出す。(2)積分の際に結晶の方向分布が一様であるという条件が成り立つようにする〔この条件は先にのべたように、応力軸（あるいは結晶軸）を座標にとったとき原点を中心とする単位球の表面上に、結晶軸（あるいは応力軸）の方位が一様に分布するということと等価である〕。

さて、 $\lambda$ 、 $\alpha$ 、 $\theta_0$ の

三つの積分のうち  $\lambda$  は応力軸（試験片軸）に関するものであり、 $\alpha$  は結晶軸に関するものである（図 2・10）。今、応力軸の二つの軸を X、Y（ただし、X 軸は試験片軸であるが応力の主軸ではない）、結晶軸の二つの軸を N、D（N はすべり面法線、D はすべり方向）とする。積分の順序はもともと  $\lambda$ 、 $\alpha$ 、 $\theta_0$  の順であるが、注意(1)にのべたように働くすべり方向を選び出す便宜上、まずすべり方向についての積分  $\alpha$  から、 $\lambda$ 、 $\theta_0$  の順に行なう（2・20）式は  $\alpha$  と  $\lambda$  について対称的であって、このいずれの順序で積分しても結果は同じとなる。ただし、積分を行なう際には常に  $\mu_{\text{Tor}} \geq 0$  の条件が成り立つものについて積分するよう注意する必要がある〕。

次に、注意(2)にのべた方位分布が一様であるという条件から、積分を実行する際に重みを考える必要がある。まず  $\alpha$  の積分、すなわち結晶軸 D の回転を考えると、試験片軸（応力軸）の方位分布が結晶軸を座標軸とする単位球上で一様となるよう注意する必要がある。したがって、X 軸と Y 軸のそれぞ

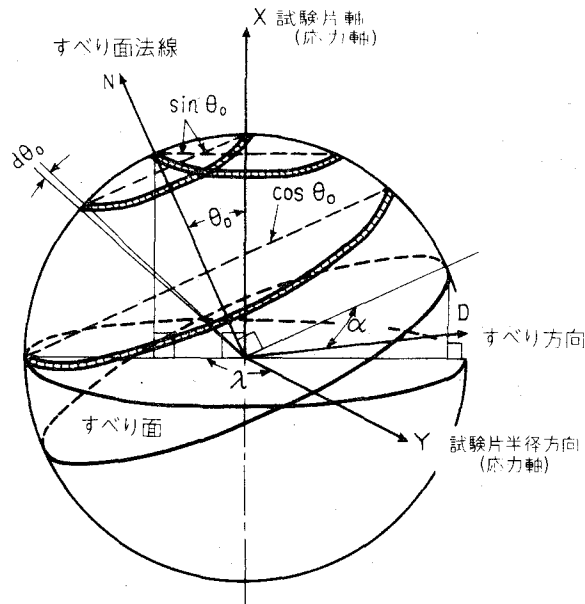


図 2・10 結晶軸と応力軸の方位関係  
(ねじりの場合)



れに対して重みを考えるが、Y軸としては $\theta_0$ の定義から $\lambda = \varphi_0 (=0)$ の場合を考えて、 $\cos \theta_0$ となる。一方X軸については $\sin \theta_0$ となる。(図2・10)。次に $\lambda$ についての積分(応力軸Yの回転)を行なうが、このときはD軸は上ですでに積分したのでN軸についてだけ一様分布を考慮すればよい。すなわち、重みは $\sin \theta_0$ となる。結局以上を総合すると、ねじりの場合には $\alpha$ 、 $\lambda$ 、 $\theta_0$ の積分に対する重みとしては $\sin^2 \theta_0 \cdot \cos \theta_0$ をかける必要があることになる。

これらの関係を用いて、次に積分を実行する。まず $\alpha$ についての積分は、hcp結晶では三つのすべり方向を持つので、 $\mu_{\text{Tor}}$ が最も大きな値を示すような $\pi/3$ の区間( $\alpha_1$ と $\alpha_1 + \pi/3$ の間)を選び出す。(2・20)式からわかるように、 $\mu_{\text{Tor}}$ は $\alpha$ に関して周期的に変化するから、

$$\mu_{\text{Tor}}(\alpha_1) = \mu_{\text{Tor}}(\alpha_1 + \pi/3)$$

の条件より得られる $\alpha_1$ を用いると $\alpha$ についての積分は(2・20)式より次のように表わせる。

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_1 + \pi/3} \mu_{\text{Tor}} d\alpha = \sqrt{\cos^2 2\theta_0 \sin^2 \lambda + \cos^2 \theta_0 \cos^2 \lambda} \dots\dots\dots (2 \cdot 21)$$

次に、 $\lambda$ の積分の区間はもともと $0 \leq \lambda \leq 2\pi$ であるが、(2・21)式の右辺の対称性から、今の場合 $0 \leq \lambda \leq \pi/2$ の区間で考えれば十分であることがわかる。結局、 $\tilde{\mu}_{\text{Tor}}$ は先の重みを考えて(2・21)式を用いると次のようになる。

$$\tilde{\mu}_{\text{Tor}} = \frac{\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_1 + \pi/3} \sin^2 \theta_0 \cos \theta_0 \mu_{\text{Tor}} d\alpha d\lambda d\theta_0}{\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_1 + \pi/3} \sin^2 \theta_0 \cos \theta_0 d\alpha d\lambda d\theta_0}$$

$$= \frac{18}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta_0 \cos \theta_0 \sqrt{\cos^2 2\theta_0 \sin^2 \lambda + \cos^2 \theta_0 \cos^2 \lambda} d\lambda d\theta_0$$

$$\equiv \frac{18}{\pi^2} I(\pi/2, \pi/2) \dots\dots\dots (2.22)$$

ここに,

$$I(\theta', \lambda') \equiv$$

$$\equiv \int_0^{\theta'} \int_0^{\lambda'} \sin^2 \theta_0 \cos \theta_0 \sqrt{\cos^2 2\theta_0 \sin^2 \lambda + \cos^2 \theta_0 \cos^2 \lambda} d\lambda d\theta_0$$

$$\dots\dots\dots (2.23)$$

であって, 数値計算により

$$I(\pi/2, \pi/2) = 0.2957 \dots\dots\dots (2.24)$$

と求まるから, したがって,

$$\tilde{\mu}_{\text{Tor}} = 0.5393 \dots\dots\dots (2.25)$$

となる。この値は先に図式的方法によって求めた値〔(2.15)式〕とよく一致している。

$$2.3 \cdot 3 \cdot 3 \quad \tau/\sigma$$

(2.19)式, (2.25)式を用いて降伏応力比  $\tau/\sigma$  の値を求めると, 計算による  $\tau/\sigma$  の値として, 図式的方法による(2.16)式の結果に対応して,

$$\frac{\tau}{\sigma} = \frac{\tilde{\mu}_{\text{Ten}}}{\tilde{\mu}_{\text{Tor}}} = \frac{\pi}{18 I(\pi/2, \pi/2)} = 0.5902 \dots\dots\dots (2.26)$$

が得られる。

## 2・3・4 ま と め

(2・26)式の結果からわかるように, hcp 金属の降伏条件  $\tau/\sigma$  の値は 0.590 となり, これは von Mises の法則による値 0.577, あるいは bcc 金属についてすべりから求めた値 0.57, よりも同じくやや大きくなっている。もっともこの差はわずかであるが, ここでのべたような解析的な取扱いにおいて, 同一の仮定を用い bcc と hcp という結晶構造の差異のみを計算に入れた場合にこのような差が生じたということは重要である。すなわち, これらの結果は, すべり面, すべり方向の数が降伏条件に関係していること, またすべり面, すべり方向の数が少なくなると  $\tau/\sigma$  の値が大きくなる傾向があることを予想させる。この点をさらに明確にするため, 次節においてすべりと降伏条件についてより一般的に検討する。

## 2・4 一 般 の 場 合

### 2・4・1 ま え が き

前節でのべた積分による計算方法を用いると, 特別に単純な数のすべり面, すべり方向を持つ結晶の場合については比較的簡単に降伏条件を求めることができ, その結果は表 2・4 に示すようになる。(なお, これらの計算の具

表 2・4 すべり面, すべり方向の数と  $\tau/\sigma$  の値の関係

すべり面の数	1	1*	1	$\infty$	$\infty$
すべり方向の数	1	3	$\infty$	1	$\infty$
$\tilde{\mu}_{Ten}$	0.212	0.318	0.333	0.333	0.500
$\tilde{\mu}_{Tor}$	0.360	0.539	0.565	0.565	1.000
$\frac{\tau}{\sigma} = \frac{\tilde{\mu}_{Ten}}{\tilde{\mu}_{Tor}}$	0.590	0.590	0.590	0.590	0.500

\* hcp 金属

体的な方法については付録 2・7・2 節でのべる。)

表 2・4 に見られるように、 $\tilde{\mu}_{\text{Ten}}$  および  $\tilde{\mu}_{\text{Tor}}$  の値はそれぞれ変わるが  $\tau/\sigma$  の値はすべり面あるいはすべり方向の数のいずれかが一つしかない場合には 0.590 となることは特徴的である。以下本節においてはこれらの点についてより一般的に検討する。

#### 2・4・2 すべりと降伏条件の関係

まず数式的に見た場合、すべり面とすべり方向が等価に扱えることは、一般の 3 軸応力状態についても次のようにして言うことができる。すなわち、主応力  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  が働いているとき、すべり面上、すべり方向に働くせん断力  $\tau$  は、

$$\tau = \sigma_1 \cos \phi_1 \cos \phi'_1 + \sigma_2 \cos \phi_2 \cos \phi'_2 + \sigma_3 \cos \phi_3 \cos \phi'_3$$

..... (2・27)

で表わされる<sup>(16)</sup>。ここに、 $\phi_i$  および  $\phi'_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) はそれぞれすべり面法線およびすべり方向が応力軸となす角である。この式からわかるように  $\phi_i$  と  $\phi'_i$  を入れ変えても、すなわちすべり面とすべり方向を入れ変えても  $\tau$  の値は変化しない。

そこで取扱いを一般的にするため、すべり面とすべり方向の内で数の多い方を  $M$ 、少ない方を  $m$  と名づけ、それらの数をそれぞれ  $n_M$  および  $n_m$ 、それらの含む等価で対称な方位を  $M_i$  ( $i = 1, \dots, n_M$ ) および  $m_i$  ( $i = 1, \dots, n_m$ ) とする。すなわち、すべり面、すべり方向の数をそれぞれ  $n_{sp}$ 、 $n_{sd}$  とすると、

$$\left. \begin{aligned} n_M &= \max(n_{sp}, n_{sd}) \\ n_m &= \min(n_{sp}, n_{sd}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2・28)$$

一般に、 $n_{sp} \neq n_{sd}$  であれば  $n_M > n_m$  であり、1 つの  $m$  に対していくつかの  $M$  が対応することになる。したがって、前節にのべた計算例からわか

るように，単位球上に一様分布を考え，結晶の全ての可能な方位を考慮するためには，必然的に $\alpha$ についての積分は $\mathbf{M}$ に， $\theta$ についての積分は $\mathbf{m}$ にそれぞれ対応することになる。

#### 2・4・2・1 $\mathbf{M}$ の影響（ $\alpha$ の積分）

すべり面あるいはすべり方向の数あるいはそれらの方位関係が降伏条件に影響くのは，方位係数の平均値 $\tilde{\mu}$ を求める際の積分の上限と下限に対してであ

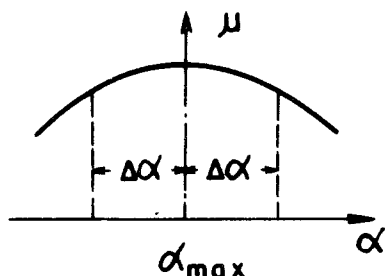


図 2・11  $\alpha$ の積分領域

る〔(2・19)，(2・22)式および付録2・7・2節参照〕。そこでまず $\alpha$ についての積分を考え $\mathbf{M}$ の中の一つの $\mathbf{M}_i$ が働く $\alpha$ の角度範囲を $2\Delta\alpha$ とする。

引張りの場合，(2・18)式からわかるよう

に， $\mu_{\text{Ten}}$ は $\cos\alpha$ の関数であり，したがって $\tilde{\mu}_{\text{Ten}}$ が最大になるよう $\alpha$ を選ぶと， $\alpha$ の積分区間は $[-\Delta\alpha, \Delta\alpha]$ となる。(図2・11)。

一方，ねじりの場合 $\mu_{\text{Tor}}$ は(2・20)式で与えられるが，(2・20)式は一般に次のように書き換えられる。

$$\mu_{\text{Tor}} = A(\theta, \lambda) \cdot \sin(\alpha + \omega) \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 29)$$

$$A(\theta, \lambda) = \sqrt{\cos^2 2\theta \sin^2 \lambda + \cos^2 \theta \cos^2 \lambda} \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 30)$$

ただし， $\omega$ は $\theta$ ， $\lambda$ の関数であって，位相のずれを表わす。(なお，(2・18)，(2・20)式においては，すべり面に対応して記号 $\theta_0$ を用いたが以下では一般的に $\mathbf{m}$ に対するものとして，単に $\theta$ と記す。)  $\mu_{\text{Tor}}$ を $\alpha$ について積分する場合にも $\tilde{\mu}_{\text{Tor}}$ が最大になるよう $\alpha$ を選ぶとすると， $(\alpha + \omega)$ の

区間を  $[\pi/2 - \Delta\alpha, \pi/2 + \Delta\alpha]$  に選ぶ必要がある。これは引張りの場合の図 2・11 に示した操作と同一である。

すなわち、 $\alpha$  は  $\mu_{\text{Ton}}$ 、 $\mu_{\text{Tor}}$  とともに一次の  $\sin$  関数の形で入っており両者の積分区間が最大値を中心にして等しいことから、 $\alpha$  についての積分は  $\tilde{\mu}_{\text{Ton}}$  と  $\tilde{\mu}_{\text{Tor}}$  で等しくなり、結局 (2・3) 式から、 $\tau/\sigma$  の値に関しては  $\alpha$  の積分、すなわち  $n_M$  あるいは  $M$  が影響しないことになる。いいかえると、すべり面とすべり方向の内の数の多い方は降伏応力比  $\tau/\sigma$  に影響を与えない。

これは、bcc 金属と fcc 金属において、結晶のすべりから考えたとき  $\tau/\sigma$  の値がほぼ等しくなることも関連している。すなわち、bcc と fcc において、 $M$  は異なるが、 $m$  は共に  $\{111\}$  で等しく (bcc ではすべり方向が  $\langle 111 \rangle$  方向、fcc の場合はすべり面が  $\{111\}$  面)、したがって  $M$  が影響しないことから  $\tau/\sigma$  の値が等しくなったものと考えられる。

#### 2・4・2・2 $m$ の影響 ( $\theta$ の積分)

次に、 $\theta$  の積分、すなわち  $m$  の影響について考える。上にのべたように  $\tau/\sigma$  の値に関するかぎり  $M$  は影響しないから、以下では簡単のため、 $n_M = \infty$  の場合、すなわち、(2・18)、(2・19) 式においてそれぞれ  $\cos\alpha = 1$ 、 $\sin(\alpha + \omega) = 1$  の場合について考えるが、これによって  $\tau/\sigma$  の値に関して一般性は失われない。(2・18) 式および (2・30) 式を比較すればわかるように、 $\mu_{\text{Ton}}$  と  $\mu_{\text{Tor}}$  で  $\theta$  についての関数形は異なっており、さらに  $\theta$  あるいは  $\lambda$  を変化させたとき、最初に考えた  $m_i$  とは別の方位  $m_i$  が働き出す可能性がある。したがって、 $\theta$  の計算においてはじめて結晶学的な要素、すなわち  $m$  が結晶のどの Miller 指数の面あるいは方向であるかということが関係してくる。したがって、 $\theta$  については、先に  $\alpha$  について行なったような総括的な議論はできないが、変化の傾向を見るために、一般的な関係について考察し、後に計算例を示す。

まず、 $\theta$  の積分の領域  $\Delta\theta$  について考える。 $\theta$  の積分はもともと  $0$ 、

$\pi/2$  の区間について行なうべきであるが、 $m_i$  の対称性によってそれをより短い区間で十分であるようにすることができる。今この回転面内で  $m$  の任意の成分  $m_i$  と  $m_j$  が隣り合っているとき、 $\Delta\theta$  は  $m_i$  が軸方向をとる位置 ( $\theta = 0$ ) から、 $\theta$  の回転によって  $m_i$  と  $m_j$  が軸方向に関して対称な位置 ( $\theta = \Delta\theta$ ) をとるまでの回転角として与えられる。

ここで  $m_i$  を結晶方位の代表として選び、 $m_i$  に対応する角を  $\theta_i$  とする。

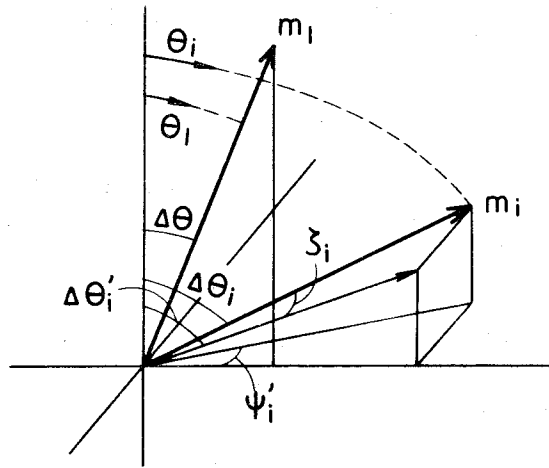


図 2.12  $m_i$  と  $m_j$  の角度関係

$m_i$  が  $\theta_i = \Delta\theta$  の位置にある場合を考え、このときほかに、図 2.12 に示す角  $\Delta\theta_i$  と  $\zeta_i$  で位置づけられる  $m_i$  のすべりが働く可能性がある場合を考える。このとき、図 2.12 に示す角  $\Delta\theta_i'$ 、 $\varphi_i'$  は幾何学的関係から次の式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \cos \Delta\theta_i' &= \cos \Delta\theta_i / \cos \zeta_i \\ \cos \varphi_i' &= \cot \Delta\theta_i / \cot \Delta\theta_i' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.31)$$

一般に、 $m_i$  が軸方向に対して図 2.12 に示す方向に傾き  $\theta_i$  および回転角  $\varphi_i$  をとったものとする、(2.31) 式と同様に次の関係が成立する。

$$\cos \theta_i = \cos (\Delta\theta_i' - \Delta\theta + \theta_i) \cdot \cos \zeta_i \dots\dots\dots (2.32)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi_i &= \cot \theta_i \cdot \tan (\Delta\theta_i' - \Delta\theta + \theta_i) \\ \lambda_i &= \lambda_i - \varphi_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.33)$$

(2.32)、(2.33) 式を用いれば、 $\theta_i$  および  $\lambda_i$  の任意の値に対する  $\theta_i$ 、

$\lambda_i$  が計算され、以下にのべるように  $m_i$  のすべりに対する Schmid factor  $\mu_{\text{Ten}}^{(i)}$  および  $\mu_{\text{Tor}}^{(i)}$  が計算できる。

2・4・2・2・1 引張りの場合

引張りの場合は (2・18) 式より、

$$\mu_{\text{Ten}}^{(i)} = \sin \theta_i \cdot \cos \theta_i = \frac{1}{2} \sin 2\theta_i \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 34)$$

となって、 $\mu_{\text{Ten}}$  最大にする  $\theta_i$  の値は  $\theta_i = \pi/4$  であり、 $\mu_{\text{Ten}}^{(i)}$  は  $\theta_i$  に関してこの最大値から対称的に減少する。したがって、すべりが働く方位は  $\theta_i$  が  $\pi/4$  に最も近い方位  $m_i$  となる。 $m$  の各要素間の角度関係が与えられれば、任意の  $\theta_i$  の値に対して  $\theta_i$  は (2・32) 式より与えられるから、最大の値  $\mu_{\text{Ten}}$  は

$$\mu_{\text{Ten}} = \max (\mu_{\text{Ten}}^{(1)}, \dots\dots, \mu_{\text{Ten}}^{(i)}, \dots\dots) \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 35)$$

で与えられる。積分の重みは結晶方位の代表として選んだ  $m_i$  について考えて  $\sin \theta_i$  となるから、 $\mu_{\text{Ten}}$  の平均値  $\tilde{\mu}_{\text{Ten}}$  は (2・35) 式より、

$$\tilde{\mu}_{\text{Ten}} = \frac{\int_S \sin \theta_i \mu_{\text{Ten}} d\theta_i}{\int_S \sin \theta_i d\theta_i} \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 36)$$

で与えられる。ここに  $S$  は  $m$  の幾何学的な対称性を考慮したとき、試験片軸方向が単位球表面上に占める最少の面積である。(2・4・2・3 節参照)。

2・4・2・2・2 ねじりの場合

ねじりの場合には (2・30) 式からわかるように、 $\mu_{\text{Tor}}$  は  $\theta$  および  $\lambda$  の関数である。すなわち、任意のすべり  $m_i$  に対しては、 $\theta_i$  の変化のほか (2・33) 式で与えられる  $\lambda_i$  の変化も関係する。したがって、最大の  $\mu_{\text{Tor}}$  を与えるすべりは、 $\theta_i$  のほかに  $\lambda_i$  の値によっても順次変化する。(2・30) 式の形からわかるように、 $\mu_{\text{Tor}}$  は  $\theta = 0$  で最大値をとる。ここで先と同じく、 $m_i$  を結晶方位の代表と考え、これに対して試験片軸方向のと



りうる単位球面上の領域を  $S$  とする。任意の  $m_i$  に対する Schmid factor を  $\mu_{\text{Tor}}^{(i)}$  とすると、(2・29) 式より  $\sin(\alpha + \omega) = 1$  の場合を考えて、

$$\begin{aligned}\mu_{\text{Tor}}^{(i)} &= A(\theta_i, \lambda_i) \\ &= \sqrt{\cos^2 2\theta_i \cdot \sin^2 \lambda_i + \cos^2 \theta_i \cdot \cos^2 \lambda_i} \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 37)\end{aligned}$$

となる。したがって、 $m_i$  が任意の角  $\theta_i, \lambda_i$  をとるとき、最もすべりやすいつすべりに対応して  $\mu_{\text{Tor}}$  は、

$$\mu_{\text{Tor}} = \max(\mu_{\text{Tor}}^{(1)}, \dots, \mu_{\text{Tor}}^{(i)}, \dots) \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 38)$$

で与えられる。

さて、ねじりの場合の積分における方位の重みは、2・3・3節にのべたように  $\sin^2 \theta_i \cdot \cos \theta_i$  となるから  $\mu_{\text{Tor}}$  の平均値  $\tilde{\mu}_{\text{Tor}}$  は、

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_{\text{Tor}} &= \frac{\int_S \int_0^\pi \sin^2 \theta_i \cdot \cos \theta_i \cdot \mu_{\text{Tor}} \, d\lambda_i \, d\theta_i}{\int_S \int_0^\pi \sin^2 \theta_i \cdot \cos \theta_i \, d\lambda_i \, d\theta_i} \\ &\quad \dots\dots\dots (2 \cdot 39)\end{aligned}$$

で与えられる。(2・36)、(2・39) 式が一般的な  $\tilde{\mu}_{\text{Ten}}, \tilde{\mu}_{\text{Tor}}$  の表示式である。具体的に境界条件が与えられた場合には、数値計算を実行することによってこれらの値を求めることができる(次節参照)。

結局、以上の考察から、降伏条件にひびくのは、 $m$  の数  $n_m$  およびその成分  $m_i$  間相互の角度であり、これらは積分の領域  $S$  に直接影響するとともに、(2・31)～(2・33) 式を通じて降伏条件に影響することがわかる。(  $n_m$  による降伏応力比  $\tau/\sigma$  の変化の傾向を付録図 2・17 に例示する。)

#### 2・4・2・3 $m = \{111\}$ の場合の計算例

ここでは、fcc および bcc 金属のすべりの特性に相当する  $m = \{111\}$  の場合について、 $\tilde{\mu}_{\text{Ten}}, \tilde{\mu}_{\text{Tor}}$  の具体的な計算方法を示す。(なお、 $m$  はす

べり面，すべり方向のいずれかを表わすが，ここでは面に対する Miller の記号（ ），および同じく等価な面に対する記号 { } を用いて  $\mathbf{m}$  を表わすものとする。）  $\mathbf{m} = \{111\}$  の場合のように， $\mathbf{m}$  が空間的，3 次元的に配置する場合には，単位球上で任意に代表として選んだ  $\mathbf{m}_1 = (111)$  の変化する領域  $S$  を考える必要がある（（2・36），（2・39）式）。

今の場合対称性から，試験片軸方向のとりうる方位は，図 2・13 の  $(111) - (011) - (001)$  で囲まれる単位球上の三角形形の領域内となる。試験片軸方向と  $(111)$  方向のなす角が  $\theta_1$  であるが， $\theta_1$  の回転面と  $(111)$ ， $(011)$  を含む面のなす角を  $\eta$  とすると， $\theta_1$  の変化範囲  $\Delta\theta$  は

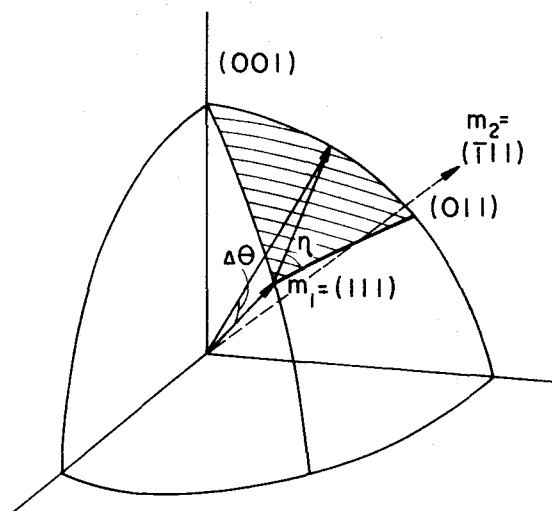


図 2・13 単位球上で試験片軸方向の占める領域

$$\cot \Delta\theta = \sqrt{2} \cos \eta, \quad 0^\circ \leq \eta \leq 60^\circ \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 40)$$

で与えられる。

$$2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \quad \widetilde{\mu}_{\text{Ten}}$$

今  $\mathbf{m}_1$  を結晶方位の代表に選んで考えると， $\mathbf{m}_1$  を図 2・13 の三角形の領域内で変化させたとき，すべりが働くのは  $\mathbf{m}_1 = (111)$  あるいは  $\mathbf{m}_1$  と  $70^\circ 32'$  はなれた位置にある  $\mathbf{m}_2 = (\bar{1}11)$  である。 $\mathbf{m}_2$  に対しては  $\Delta\theta_2 = \Delta\theta$  であり，また一般に次の関係である。

$$\cos^2 \zeta_i = \cos^2 r_i + \cos^2 \eta_i \cdot \sin^2 r_i \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 41)$$

ここに、 $r_i$  は  $m_i$  と  $m_i$  のなす角、 $\eta_i$  は  $\theta_i$  の回転面と、 $m_i$  および  $m_i$  を含む面のなす角である。 $m_2$  に対しては  $r_2 = 70^\circ 32'$ 、 $\eta_2 = \eta$  であるから、(2.41) 式より  $\zeta_2$  が求まれば、(2.31) 式から  $\Delta\theta_2'$  が、(2.32) 式から  $\theta_2$  が求まる。(2.36) 式は今の場合、

$$\tilde{\mu}_{\text{Ten}} = \frac{\int_0^{60^\circ} \Delta\theta \int_0^{\Delta\theta} \sin\theta_1 \mu_{\text{Ten}} d\theta_1 d\eta}{\int_0^{60^\circ} \Delta\theta \int_0^{\Delta\theta} \sin\theta_1 d\theta_1 d\eta} \quad \dots\dots\dots (2.42)$$

と書けるから、(2.34)、(2.35) 式の関係を用いて数値積分を実行すると、

$$\tilde{\mu}_{\text{Ten}} = 0.475 \quad \dots\dots\dots (2.43)$$

を得る。(なお、この値が bcc 金属について図式的方法により求めた(2.11) 式の結果よりやや大きいのは、先の計算が  $M$  として 48 のすべり面を考えているのに対し、ここでは  $n_M = \infty$  ととったためと考えられる。

$$2.4.2.3.2 \quad \tilde{\mu}_{\text{Tor}}$$

ねじりの場合には、 $\theta_1$  の回転のほか  $\lambda_1$  の変化によっても働くすべり  $m_i$  が変化する。すなわち、結晶方位を代表する  $m_1 = (111)$  のほかに、三つのすべる可能性のある方位、 $m_2 = (\bar{1}11)$ 、 $m_3 = (1\bar{1}1)$ 、および  $m_4 = (\bar{1}\bar{1}1)$  がある。 $m_3$ 、 $m_4$  に対する角  $\Delta\theta_3$ 、 $\Delta\theta_4$  は、

$$\cos\Delta\theta_i = \cos r_i \cos\Delta\theta + \sin r_i \sin\Delta\theta \cos \eta_i \quad \dots\dots\dots (2.44)$$

で与えられる。(2.41)、(2.44) 式を用いると、(2.31) ~ (2.33) 式から各  $m_i$  に対する角  $\varphi_i$  を  $\eta$  の関数として求めることができる。したがって、(2.37) ~ (2.39) 式より  $\mu_{\text{Tor}}$  を  $\lambda_1$  および  $\theta_1$  について積分し、さらに(2.42) 式と同様に  $\Delta\theta$  をかけて  $\eta$  について積分することにより、ねじりの場合の Schmid factor の平均値  $\tilde{\mu}_{\text{Tor}}$  が求まる。

数値計算を実行すると

$$\tilde{\mu}_{\text{Tor}} = 0.821 \quad \dots\dots\dots (2.45)$$

となる（なお、数値積分の分割の区間は、 $\lambda_1$ ， $\theta_1$ ， $\eta$ とも $1^\circ$ とした）。この値は先に図式的方法により求めた（2・10）式の値とよく一致している。

$$2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \quad \tau/\sigma$$

（2・3），（2・43），（2・45）式から降伏応力比の値を求めると

$$\tau/\sigma = 0.579 \quad \dots\dots\dots (2.46)$$

となる。

## 2・5 考 察

### 2・5・1 fcc 金属における優先方位の影響

一般に材料の持つ優先方位が降伏条件に影響を及ぼすことは、2・2・3節でbcc金属の場合についてのべたが、積分による計算においても、方位についての積分を行なう際に、重みをつけ加えることによって、優先方位の影響を考慮することが原理的に可能である。（たとえば、電子計算機により数値計算を行なう場合には、プログラムの一部に方位の重みの修正項を加えればよい。）ただし、ここでは定性的な面からfcc金属の降伏条件に及ぼす優先方位の影響について考えてみる。

先にものべたように、bcc金属とfcc金属ではともに $m = \{111\}$ となり、同様に扱うことができるが、これから優先方位の影響に関しても、両者が類似の傾向を持つことが推論される。fcc金属の冷間引抜きにおける優先方位（wire texture）は $[100]$ と $[111]$ であるが、これらの占める割合は金属の種類によって異なることが知られている。すなわち、 $[100]$ ／ $[111]$ の比はAlで0，Cuで $2/3$ ，Auで1，

Ag では 3, であり, この比の値は焼鈍によってもあまり変化しない<sup>(2)(17)</sup>。  
 bcc 金属では  $[100] / [111]$  の比が大きくなるほど  $\tau/\sigma$  の値も大きくなる傾向がある (表 2・2) が, この結果を今の場合に適用すると, Al, Cu においては引抜きによる優先方位によって, 方位が均一に分布する場合にくらべて, 降伏応力比  $\tau/\sigma$  の値が小さくなり, 逆に Ag では  $\tau/\sigma$  の値が大きくなることが推論される。これは bcc 金属の場合優先方位によっての値が一様に大きくなったのと対照的である。

## 2・5・2 hcp 金属における底面すべり以外のすべり, および双晶変形の影響

hcp 結晶のすべりは通常 (0001) 面 (basal slip) であるが, ひずみの大きい複雑な変形, あるいは特定の温度領域における変形などの場合には他の面でもすべる。しかし, この場合もすべり方向は  $\langle 1120 \rangle$  で変わらない。可能なすべり面が多い場合においては, すべり面の数の方がすべり方向の数 (3 方向) より多くなり, したがってすべり方向が降伏条件を支配することになる。

すべり方向  $\langle 1120 \rangle$  は 1 つの平面 (底面) 上で, 互に  $\pi/3$  の角度をなす。したがって, この場合の降伏条件は, 後に図 2・17 に示す  $n_m = 3$  の場合として与えられるから,  $\tau/\sigma = 0.586$  となる。hcp 金属の通常のすべり (basal slip) においては  $\tau/\sigma = 0.590$  であったこと ((2・26) 式) から, hcp 金属の降伏条件  $\tau/\sigma$  の値はすべり面が増えた場合やや小さくなるだけで, ほとんど変化しないことがわかる。hcp 金属の双晶は  $(10\bar{1}2)$  面,  $[10\bar{1}\bar{1}]$  方向 に生じる。双晶の場合も変形はせん断変形であるが, すべりのように可逆的でなく, 一方向にのみ起こる。しかし,  $\tau/\sigma$  の値に対しては, 双晶もすべりと同様に幾分値を下げる方向に働くことが推論される。

これらの結果の実験データによる確認は, 現在までのところ hcp 金属について降伏条件を求めた実験が見当たらないので出来ないが, 降伏現象の巨

視的な側面と微視的な側面の相互関係を実験的に究明していくことは今後の課題であると思われる。

### 2・5・3 らせん転位の運動の影響

先の取扱いにおいては、結晶内のすべりは特定のすべり面上を特定の方向に起こるものと考えた。しかしながら、転位論においてよく知られているように<sup>(18)</sup>、らせん転位は転位線の方向と同じ方向の Burgers vector を持ち特定のすべり面を持たない。すなわち、らせん転位に対してはすべり方向のみが Burgers vector によって規定されている。(よく知られているように、材料の変形応力に大きな影響をもつ cross slip もらせん転位のこの性質による。) したがって、らせん転位の運動はみかけ上すべり面が増加したのと類似の傾向をもっと考えられる。すべり面がすべり方向よりも多い場合 ( $\eta_{sp} \geq \eta_{sd}$ ) には、2・4・3 節の議論からもわかるように、らせん転位の運動は降伏条件に影響しないが、逆の場合 ( $\eta_{sd} \geq \eta_{sp}$ ) には降伏条件はみかけ上すべり面が増したのと同様な影響を受けると考えられる。これを fcc と bcc 金属の場合について当てはめると、fcc ではらせん転位の運動により  $\tau/\sigma$  の値が小さくなる傾向にあるが、bcc ではもともとすべり面の方がすべり方向よりも数が多いから、 $\tau/\sigma$  の値は変化しないと推論される。従来報告されている実験結果<sup>(19)(20)</sup>においても  $\tau/\sigma$  の値は fcc 金属の方が bcc 金属よりも低い傾向を示しており、以上の推論を裏付けている。(同様の傾向は 1・3・5・3 節でのべたように、組合せ応力下の疲れ試験結果にも認められている。)

なお、刃状転位の上昇運動も降伏条件に関してはここにのべたらせん転位の影響と類似の傾向をもつと考えられる。

### 2・5・4 von Mises の法則の物理的解釈について

von Mises の法則は、それが持つ対称的かつ単純な数学的形式のため複雑な問題に適用しやすくしばしば用いられる<sup>(21)</sup>。ここでは、以上のべた結果と、一般に塑性力学において Hencky<sup>(22)</sup> や Nadai<sup>(23)</sup> によってなされて

いるその意味づけとの関連についてのべる。

Nadai<sup>(28)</sup>によれば, von Mises の法則は応力の主軸を座標軸にとって考えたとき  $\{111\}$  面からなる 8 面体に働くせん断応力に対応する。このことから, von Mises の法則は 8 面体せん断応力説とも呼ばれている。Nadai の考えた  $\{111\}$  面と fcc 金属のすべり面  $\{111\}$  面 とは一見したところ何か相互に関係があるように見える。しかしながら, Nadai の行なったのと同様な考察を bcc 金属のすべり面である  $\{110\}$  面の作る 12 面体,  $\{112\}$  面の作る 24 面体,  $\{123\}$  面の作る 48 面体について行ない,  $\tau/\sigma$  の値を求めると図 2・14 のようになって, von Mises の

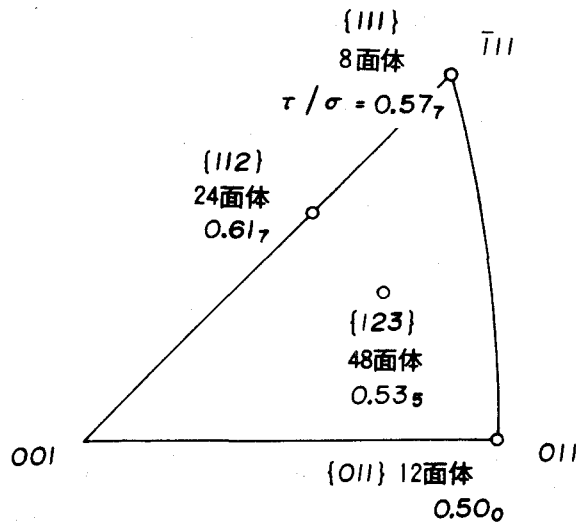


図 2・14 多面体上のせん断応力

法則による値からずれを示す。すなわち, Nadai の 8 面体を作る面と結晶のすべり面との間には直接的な関係はない。

これからわかるように, Nadai の考え方と先の  $\mu$  による考え方とはある座標系に対するある特定の面を考え, またその面上のせん断応力成分を考える点では同じであるが, 考えている面が Nadai においては単に力学的な応力面であるのに対し, ここでのべたのが結晶のすべり面である点で根本的に異なっている。この意味で Nadai の 8 面体応力説はむしろ von Mises

の降伏条件の力学的解釈<sup>(7)</sup> であり、一方本報告でのべた考え方は実際の結晶変形、結晶のすべりや転位の動きなど、と対応した具体的な物理像との関連を示しているといえる。(なお、力学的な応力面を考えている点では Tresca の最大せん断応力説も同様である。)

他方 Hencky<sup>(22)</sup> によれば von Mises の法則は弾性せん断変形エネルギーがある限界値に達した時降伏が始まる事を意味すると解釈される。<sup>(1)</sup> この解釈は金属の変形がすべり(せん断、すなわち、たとえば転位が Peierls potential を越えること)によってなされる点においては実際と一致しているが、この場合すべりは抽象的なものであって、すべり面あるいはすべり方向といった具体的な物理像との関連はない。すなわち、実際の結晶は特有の結晶形を持ち、変形は非等方性であるのに、エネルギー的考え方では多結晶体をはじめから統計的にみた等方体として扱っている<sup>(24)</sup>。

一般に、エネルギー的考察は現象のはじめの状態と最終の状態の差をあらわすものであって、現象論的な像を示すものではあるが、現象の機構や過程そのものを示すのではない。言いかえると、そのような解釈は一般にわれわれが問題としている物理系を不完全にしか知らないことを意味している<sup>(25)</sup>。Hencky の解釈と比較すると、ここでのべた結晶のすべりの考えはより実体に則した像を示していると考えられる。

#### 2・5・5 Dehlinger の研究との対応について

ここで、やはり同じく結晶のすべりと降伏条件の関係についての考察を行なった Dehlinger の研究<sup>(16)</sup> との関連について触れておく。

Dehlinger は、数式上の対称性の議論から、各結晶のすべりを考えたとき必然的に多結晶体の降伏条件として von Mises の条件式そのものが得られることを導いている。しかしながら、この Dehlinger の考え方には次のような 2, 3 の問題点がある。

まず、Dehlinger は、すべり面、すべり方向についての積分を全ての方位について行なっているが、実際に結晶がすべるのは最大せん断応力を受け



るすべり面で優先すると考えられる。すなわち、Dehlinger の計算にはすべり面，すべり方向がいくつかあるとき，その中でもっともすべりやすい方位を選び出すという操作が入っていない。その意味からすると積分は Dehlinger が考えたように全方位に対してではなく，ある一つのすべり面，すべり方向を考えたとき，そのすべりが働くような結晶方位の区間をとるべきであると考えられる。（このことは表2・4に示す，あらゆるすべり面，すべり方向をとりうる場合を考えると差異が明瞭になる。すなわち，このときは Tresca の条件と一致する。）

さらに，すべり面法線とすべり方向は常に直角をなす。したがって，すべり面の方向とすべり方向とは互いに完全な独立変数ではない。しかるに，Dehlinger においてはこの点は考慮されていないようで，このために，表2・4中のすべり面，すべり方向ともに一つの場合も Dehlinger とは異なった結果が得られたものと考えられる。また，ねじりの場合の考察からもわかるように，円柱試験片をねじった場合，結晶粒の方位が同じでも，試験片の円周上の位置入によって，すべり面上に働く応力が異なってくるが，この点に対する考慮も Dehlinger においては明瞭でない。

結局，多結晶体の降伏条件を求めるには，各々のすべり面に対する  $\mu$  の値の中から，最大値を選び出し，それらをおよそ限られた区間内で積分するという手順を含むものであり，一般的な表式を導くのは本質的に困難であって，数値的な検討が要求されるものであると考えられる。

#### 2・5・6 Taylor model との対応について

本章で解析に用いた多結晶の変形の Sachs model では，各結晶粒について最大せん断応力の働く面のみですべると考えているが，一方 Taylor<sup>(26)</sup> は多結晶の変形の model として多重すべりと結晶粒相互の拘束を考えた model を提案した。すなわち Taylor は多結晶 fcc 金属において各結晶粒がひずみ一定の条件の下に互いに拘束されながら変形するとしたときの各結晶粒の方位と

多重すべりの関係を求めている。

この Taylor の考えはその後 Bishop と Hill<sup>(27)</sup> によって多軸応力下の問題に拡張され、降伏条件に対する検討もなされている。Bishopらは材料の一樣性を仮定した上で、Taylorの理論と塑性力学における最大塑性仕事の原理を組合せて、fcc 金属の降伏条件を導いた。また Taylor の理論はその後さらに Lin<sup>(28)</sup> によって弾性ひずみ成分をも含めた形に拡張され、さらに Hutchinson<sup>(29)</sup> によって bcc の降伏条件に対する数値計算がすべり方向のみを考えた場合についてもなされている。それらの結果を先にのべた計算結果とともにまとめて表 2・5 に示す。

表 2・5  $\tau/\sigma$  の値

	von Mises	単一すべり (Sachs) ( $\tilde{\mu}_{Ten}/\tilde{\mu}_{Tor}$ )			多重すべり (Taylor)	
		bcc	fcc	hcp	bcc	fcc
$\tau/\sigma$	0.57 <sub>7</sub>	0.57 <sub>9</sub>		0.59 <sub>0</sub>	0.55 <sub>6</sub> <sup>*</sup>	0.54 <sub>0</sub> <sup>**</sup>

\* J. W. Hutchinson.

\*\* J. F. W. Bishop & R. Hill.

本報告でのべた Sachs modelを出発点にしたものとこれら Taylor model を基礎にしたものとを比較すると、Sachs model はなによりも物理的な像が簡単であり、ひずみの少い領域やまた疲れとの対応を考える場合あるいは実験との対応を考える場合などに有効であると考えられる。しかしながら、Sachs model の欠点は多結晶内で応力が一定と考えているため、粒界でのひずみの連続性が保証されないことであり<sup>(30)</sup>、したがって大きなひずみの変形に対しては、Taylor model の方がより合理的な理論であるといえる。ただし、Taylor の理論はすべり系の少ない hcp 金属には適用できず、また降伏応力に関するかぎりでは、 $\tau/\sigma$  の値から見たとき、ここでのべた Sachs model による値のほうが実験結果との対応が良い<sup>(19)(20)</sup>。

2・4・2・1 節でのべたように、降伏応力比  $\tau/\sigma$  に  $M$  が影響しないのは Sachs model を採用し、single slip を考えていることにもよると考えられる。また、Taylor の理論にもとづく降伏条件  $\tau/\sigma$  の計算値（表 2・5）が von Mises の条件よりも低い値を示すのは、Taylor の理論が多重すべりを考えていることに由来していると考えられる。

実際の金属結晶の変形は金属の種類やひずみの領域によってもそれぞれ特徴があり、おのおの場合について結晶を model 化して考える際にも、それぞれ適した model について検討する必要があると考えられる。

## 2・5・7 ま と め

本研究では、降伏条件としてねじりと引張りの降伏応力比  $\tau/\sigma$  の値についてのみのべた。これは Lode のパラメータ  $[\mu]$  でいえば  $[\mu] = 0$  の場合に相当する<sup>(1)</sup>。一般の  $[\mu]$  の値についての同様な計算は、原理的には可能ではあるが、数式的には非常に複雑になると予想される。しかしながら、本研究とはやや異なった立場から行われた Bishop らの研究<sup>(27)</sup>において、一般の  $[\mu]$  の値についても  $[\mu] = 0$  のときと同様の傾向があることが示されており、これから類推すると、ここでのべた結果も一般的に成立することが期待される。

本章の解析は全て 2・1・2 節でのべた三つの仮定をもとにして導かれたものである。これらの仮定の妥当性そのものについては、さらに微視的な立場、たとえば転位論などによって検討されねばならない。この意味では、ここで行なった考察は中間的なものであり、macro な現象と micro な像とを関連づける一つの段階であると考えられる。

## 2・6 結 言

金属材料の降伏条件を結晶のすべりから検討した。すなわち、多結晶中の各結晶がそのすべり面に働く最大応力がある一定の値になったとき降伏がおこる（Sachs model に対応する）として、負荷応力が純ねじりと純引張り

であるときの降伏応力比  $\tau/\sigma$  を求め、考察を加えた。その結果を要約すると次のようになる。

(1) bcc 金属において結晶方位が等方的な場合、 $\tau/\sigma = 0.579$ となる。これは von Mises の法則による値 0.577 に非常に近い。また軟鋼についての実験結果と一致する。一方、bcc 金属で引張り加工、圧延によって生じる優先方位  $[110]$  あるいは  $[100]$  を持つ組織は、結晶のすべりから計算したとき  $\tau/\sigma$  の値を等方性の場合より大きくする傾向がある。

(2) hcp 金属の basal slip について、引張りとねじり変形における結晶の各方位に対する Schmid factor の分布をステレオ投影上示した。hcp 金属では降伏応力比  $\tau/\sigma$  は 0.590 となる。

(3) Schmid factor の平均値を積分により求める計算方法を開発し、これを応用してすべりと降伏条件の関係について一般的な考察を行なった。すなわち、降伏応力比  $\tau/\sigma$  に主としてひびくのは、すべり面、すべり方向の中で数の少ない方  $m$  の数  $n_m$  とその  $m$  の含む方位  $m_i$  相互の方位関係である。一般に  $n_m$  が大きくなると  $\tau/\sigma$  の値は減少し、 $n_m = \infty$  では  $\tau/\sigma = 0.500$  となる。

(4) bcc 金属あるいは fcc 金属で  $\tau/\sigma$  の値が von Mises の法則による値にほぼ一致するのも、これらの結晶が特定のすべり面あるいはすべり方向を持っていることに起因していると考えられる。

(5) このように結晶のすべりを考えに入れることにより、多結晶金属の降伏条件と結晶構造あるいは結晶粒の集合状態の間の相関性を考えることが可能となる。

## 2・7 付 録

### 2・7・1 hcp 金属の $\bar{\mu}_{\text{Tor}}$ 計算方法

2・3・2でのべたステレオ投影上の各方位に対する  $\mu_{\text{Ten}}$  および  $\bar{\mu}_{\text{Tor}}$  の値を求める手続きを以下に具体的に示しておく。

まずステレオ三角形上に(1010)および(0001)から測った角 $\phi$ および $\theta_0$ のそれぞれに対して $4^\circ$ 間隔の軌跡を描き、両者の軌跡の交点を考える。引張りの場合は、(2・14)式中の角 $\theta_d$ の三つのすべり方向に対する値をそれぞれ $\theta_{d1}$ 、 $\theta_{d2}$ 、 $\theta_{d3}$ と記すと、(2・13)式を用いて次の関係を導くことができる。

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta_{d1} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \phi - \frac{1}{2} \sqrt{1 - (\cos^2 \theta_0 + \cos^2 \phi)} \\ \cos \theta_{d2} &= \sqrt{1 - (\cos^2 \theta_0 + \cos^2 \phi)} \\ \cos \theta_{d3} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \phi - \frac{1}{2} \sqrt{1 - (\cos^2 \theta_0 + \cos^2 \phi)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2 \cdot 47)$$

したがって、これから $|\cos \theta_{d1}|$ 、 $|\cos \theta_{d2}|$ 、 $|\cos \theta_{d3}|$ 中の最も大きな値を用いて(2・14)式から $\mu_{\text{Ten}}$ を求めると、それがその方位の結晶に対するSchmid factor  $\mu_{\text{Ten}}$ となる。

ねじりの場合は、まずhcpにおいてはすべり面が一つだけであるので、 $\varphi_0$ の値は任意にとることができるから、簡単のため $\varphi_0 = 0$ とおく。(2・6)、(2・7)式から $\varphi_d$ を消去すると次の式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \mu_{\text{Tor}} &= F \sin \lambda + G \cos \lambda \\ F &= \frac{\cos 2\theta_0}{\sin \theta_0} \cos \theta_d \\ G &= \cos \theta_0 \cdot \sin \theta_d \sqrt{1 - \cot^2 \theta_0 \cot^2 \theta_d} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2 \cdot 48)$$

ここに、 $F$ 、 $G$ の値は(2・47)式の $\theta_{d1}$ 、 $\theta_{d2}$ 、 $\theta_{d3}$ のそれぞれに対して求まる。それらを用いて得られる三つの $\mu_{\text{Tor}}$ の値は $\lambda$ によって変化するが、三つの中で最も大きな値を選び出すよう注意する必要がある。この点を図2・15に模型的に示す(図において、 $\mu_{\text{Tor}}$ の負の値は逆方向のすべりを意味する)。さて、絶対値をとって大きさの順にならべたとき、 $F$ と $G$ の順序は逆になるから、今、 $F_1 \leq F_2 \leq F_3$ 、 $G_1 \geq G_2 \geq G_3$ となったものと仮定する。また、 $\lambda$ の変化範囲はもともと $0 \leq \lambda \leq 2\pi$ であるが(2・48)式の対称性から $0 \leq \lambda \leq \pi$ で考えれば十分である。 $\lambda$ を0から増していったとき、1

と2のすべりが交代する境界を $\lambda_1$ 、2と3のすべりが交代する境界を $\lambda_2$ とする。 $\lambda$ が大きくなると(2・48)式の $\mu_{\text{Tor}}$ の右辺は負となるが、 $\mu_{\text{Tor}}$ の最大は絶対値で考えればよいから、再び3のすべりと1のすべりの交代する $\lambda$ の値 $\lambda_3$ が現われる(図2・15)。

ここに、 $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$ 、 $\lambda_3$ はそれぞれ次の式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \tan \lambda_1 &= \frac{G_1 - G_2}{F_2 - F_1}, & \tan \lambda_2 &= \frac{G_2 - G_3}{F_3 - F_2} \\ \tan \lambda_3 &= - \frac{G_1 + G_3}{F_1 + F_3} \end{aligned} \right\} \dots\dots (2 \cdot 49)$$

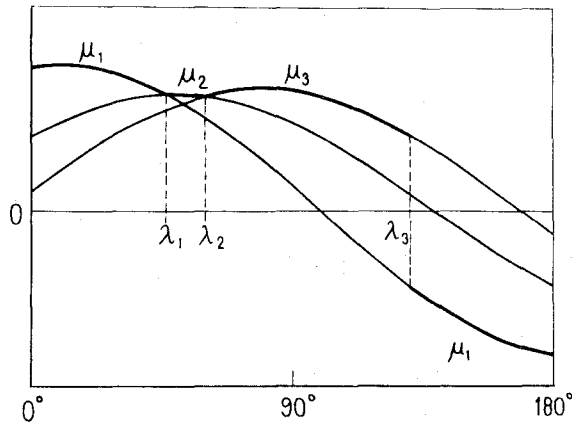


図2・15 hcp 金属の三つのすべり方向に対する $\mu_{\text{Tor}}$ と $\lambda$ の関係(図式的)

これらの関係を用いると、 $\mu_{\text{Tor}}$  の  $\lambda$  に対する平均値  $\bar{\mu}_{\text{Tor}}$  は次のように表わせる。

$$\bar{\mu}_{\text{Tor}} = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\lambda_1} \mu_1 d\lambda + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mu_2 d\lambda + \int_{\lambda_2}^{\lambda_3} \mu_3 d\lambda - \int_{\lambda_3}^{\pi} \mu_1 d\lambda \right\} \dots\dots\dots (2 \cdot 50)$$

ここで簡単のため  $\mu_{\text{Tor}} (F_i, G_i) \equiv \mu_i$  と記した。(2・50)式は図2・15の太線の部分の変化に対応する。(2・50)式を書き直すと、

$$\bar{\mu}_{\text{Tor}} = \frac{1}{\pi} \left\{ \sec \lambda_1 (F_2 - F_1) + \sec \lambda_2 (F_3 - F_2) - \sec \lambda_3 (F_1 + F_3) \right\} \dots\dots\dots (2 \cdot 51)$$

となり、結局(2・49)，(2・51)式から、ステレオ三角形内の基盤の網目の各交点の方位に対応する  $\bar{\mu}_{\text{Tor}}$  の値を求めることができる。

## 2・7・2 単純なすべり系を持つ結晶の降伏条件の計算

ここでは先に hcp 金属の場合(2・3・3節)で開発した積分による計算方法を応用して、単純な数のすべり面、すべり方向を持つ仮想的な結晶を例にとって降伏条件を具体的に計算する。

### 2・7・2・1 すべり面、すべり方向とも一つの場合

引張りの場合には、Schmid factor は(2・18)式で与えられるから全ての方位の結晶に対する平均値  $\bar{\mu}_{\text{Ten}}$  を求めるためには先と同じく重み  $\sin \theta_0$  をかけて、 $\alpha, \theta_0$  について積分する。今の場合、すべり面、すべり方向とも一つであるので、積分範囲は  $\alpha, \theta_0$  とともに0から  $\pi/2$  までとって、

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_{\text{Ten}} &= \frac{\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin \theta_0 \cdot \mu_{\text{Ten}} \, d\alpha \, d\theta_0}{\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin \theta_0 \, d\alpha \, d\theta_0} \\ &= \frac{2}{3\pi} = 0.2122 \dots\dots\dots (2.52)\end{aligned}$$

となる。

ねじりの場合には Schmid factor  $\mu_{\text{Tor}}$  は (2.20) 式で与えられる。平均値  $\tilde{\mu}_{\text{Tor}}$  を求めるためには、まず  $\alpha$  についての積分を行なうが、今の場合すべり方向は一つだけであるので  $\alpha$  の区間としては  $\pi$  をとり、区間  $(\alpha_1, \alpha_1 + \pi)$  を考える。(2.20) 式は  $\alpha$  について周期  $2\pi$  の  $\sin$  関数であるので、 $\mu_{\text{Tor}} \geq 0$  の条件の下に、この区間において  $\alpha$  についての  $\mu_{\text{Tor}}$  の平均値が最大になるようにするためには、 $\mu_{\text{Tor}}(\alpha_1) = \mu_{\text{Tor}}(\alpha_1 + \pi) = 0$  とすべきであるから、この関係から求まる  $\alpha_1$  を用いると、 $\mu_{\text{Tor}}$  の  $\alpha$  についての積分は、

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_1 + \pi} \mu_{\text{Tor}} \, d\alpha = 2 \sqrt{\cos^2 2\theta_0 \sin^2 \lambda + \cos^2 \theta_0 \cos^2 \lambda}$$

となる。したがって、 $\tilde{\mu}_{\text{Tor}}$  は (2.24) 式を用いると、

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_{\text{Tor}} &= \frac{\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_1 + \pi} \sin^2 \theta_0 \cdot \cos \theta_0 \mu_{\text{Tor}} \, d\alpha \, d\lambda \, d\theta_0}{\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_1 + \pi} \sin^2 \theta_0 \cdot \cos \theta_0 \, d\alpha \, d\lambda \, d\theta_0} \\ &= 12 I(\pi/2, \pi/2) / \pi^2 \\ &= 0.3596 \dots\dots\dots (2.53)\end{aligned}$$

となる。結局、1すべり面、1すべり方向の場合は、(2.8)、(2.52)、(2.53) 式より降伏応力比の値は、



$$\frac{\tau}{\sigma} = \frac{\tilde{\mu}_{\text{Ten}}}{\tilde{\mu}_{\text{Tor}}} = \frac{\pi}{18 I(\pi/2, \pi/2)} = 0.5902$$

..... (2.54)

となる。なお、上の計算ではすべり面、すべり方向の指数 (Miller 指数) を指定しなかったが、上の計算過程からわかるように、たとえこれを定めてもそれらは積分による平均化の過程で意味を失ってしまう。

2.7.2.2 すべり面が一つで、すべり方向が任意である場合

まず引張りの場合には、(2.18) 式において  $\alpha$  が任意の値を取り得るから  $\mu_{\text{Ten}}$  が最大になるよう  $(\cos \alpha)_{\max} = 1$  と選ぶと、

$$\tilde{\mu}_{\text{Ten}} = \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta_0 \cos \theta_0 \, d\theta_0}{\int_0^{\pi/2} \sin \theta_0 \, d\theta_0} = \frac{1}{3}$$

..... (2.55)

次にねじりの場合には、まず  $\mu_{\text{Tor}}$  の最大値を与える  $\alpha$  を選ぶ必要がある。そこで、(2.20) 式を  $\alpha$  に関して微分して 0 とおき、 $\mu_{\text{Tor}}$  の最大値を与える  $\alpha$  の値  $\alpha_0$  を求め、この  $\alpha_0$  を再び (2.20) 式に代入すると、

$$[\mu_{\text{Tor}}]_{\alpha_0} = \sqrt{\cos^2 2\theta_0 \cdot \sin^2 \lambda + \cos^2 \theta_0 \cdot \cos^2 \lambda}$$

..... (2.56)

となる。したがって、

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_{\text{Tor}} &= \frac{\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta_0 \cdot \cos \theta_0 \cdot [\mu_{\text{Tor}}]_{\alpha_0} d\lambda d\theta_0}{\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta_0 \cdot \cos \theta_0 d\lambda d\theta_0} \\ &= \frac{6}{\pi} I(\pi/2, \pi/2) = 0.5648 \quad \dots\dots\dots (2.57)\end{aligned}$$

となる。(2.55), (2.57)式より,

$$\begin{aligned}\frac{\tau}{\sigma} &= \frac{\tilde{\mu}_{\text{Ten}}}{\tilde{\mu}_{\text{Tor}}} = \frac{\pi}{18 I(\pi/2, \pi/2)} = 0.5902 \\ &\quad \dots\dots\dots (2.58)\end{aligned}$$

となる。

以上においては、すべり面の数の方がすべり方向の数よりも少ない場合について考えたが、(2.27)式に示されるように、一般に数学的にはすべり面とすべり方向を交換しても  $\tilde{\mu}_{\text{Ten}}$ ,  $\tilde{\mu}_{\text{Tor}}$  の値は変化しないから、(2.58)式の結果は逆にすべり方向が一つですべり面が任意であるときも同様に成立する。

2・7・2・3 すべり面、すべり方向とも任意の場合

引張りの場合には、(2.18)式において  $\theta_0$  および  $\alpha$  を常に  $\mu_{\text{Ten}}$  の値を最大にするように選ぶことができるから、

$$\begin{aligned}(\cos \alpha)_{\max} &= 1, \quad (\sin \theta_0 \cos \theta_0)_{\max} = 1/2 \\ \text{を用いて,} \\ \tilde{\mu}_{\text{Ten}} &= 1/2 \quad \dots\dots\dots (2.59)\end{aligned}$$

ねじりの場合についても、同じく全ての方位の結晶に対して  $\mu_{\text{Tor}}$  を最大にするように  $\alpha$ ,  $\theta_0$  をそれぞれ選ぶ。そのためには、(2.56)式におい

て  $\mu_{\text{Tor}}$  を最大にするように  $\theta_0 = 0$  とすると,

$$[\mu_{\text{Tor}}]_{\alpha_0, \theta_0=0} = 1$$

となる。したがって,

$$\tilde{\mu}_{\text{Tor}} = 1 \quad \dots\dots\dots (2.60)$$

である。(今の場合  $\mu_{\text{Ten}}, \mu_{\text{Tor}}$  とも  $\alpha, \lambda, \theta_0$  に無関係となるので, 先の(2.55), (2.57)式におけるような重みの項は分母分子で打消してしまう。) 結局, (2.59), (2.60)式より,

$$\frac{\tau}{\sigma} = \frac{\tilde{\mu}_{\text{Ten}}}{\tilde{\mu}_{\text{Tor}}} = 0.500 \quad \dots\dots\dots (2.61)$$

が得られる。これはここで考えた条件が Tresca の法則(最大せん断応力説)と基本的に同じ考え方となっていることからもうなずける。これらの計算結果をまとめたのが先の表 2.4 である。

### 2.7.3 $\mathbf{m}$ の配置が二次元的な場合の $\tau/\sigma$ の計算例

ここでは, すべり系の数によって降伏条件がどのように変化するかという点を調べるため, 2.4 節にのべた一般的な場合に対する具体的な例としてすべり  $\mathbf{m}$  が 2 次元的な配置をする場合 ( $\theta_1$  の変化が一平面内だけで起こる場合) を仮想的に考えて検討する。このとき, (2.36), (2.39) 式の積分領域  $S$  は, 単に  $\theta_1$  についての積分となる。またここでは,  $\mathbf{m}$  の等価な要素  $\mathbf{m}_i$  の間の角度が全て等しいものとする。(一般に, 実在の結晶ではすべり  $\mathbf{m}$  の配置は 3 次元的であって, ここで考えるのは  $\tau/\sigma$  の変化の傾向を調べるための仮想的な例である。)

$\mathbf{m}$  の要素  $\mathbf{m}_i$  が互になす角  $\theta^*$  は,

$$\theta^* = 360^\circ / 2n_m \quad \dots\dots\dots (2.62)$$

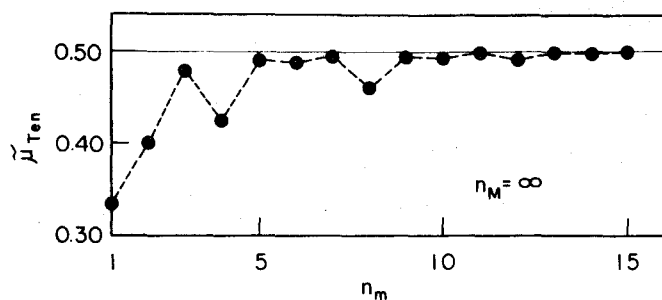
で与えられる。先と同じく、結晶方位の代表として  $m_1$  をとると、 $\Delta\theta$  は  $m_1$  が軸方向をとってから、回転により  $m_1$  と隣りの  $m_2$  が軸方向に関して対称な位置に来るまでの回転角として与えられるから、

$$\Delta\theta = \frac{\theta^*}{2} = \frac{360^\circ}{4n_m} \quad \dots\dots\dots (2.63)$$

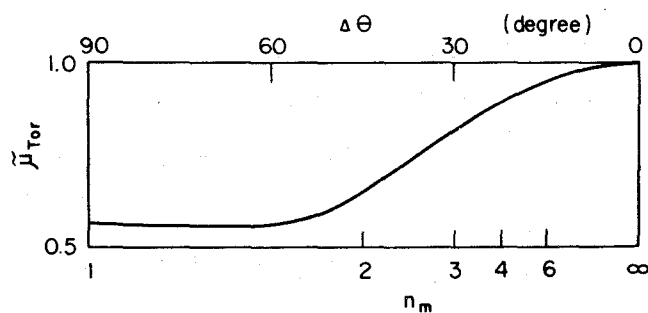
となり、 $\theta_1$  の積分範囲は  $0 \leq \theta_1 \leq \Delta\theta$  となる。

### 2・7・3・1 $\tilde{\mu}_{Ten}$

引張りの場合、各  $\theta_1$  の値に対する  $\mu_{Ten}$  の値は、すべり  $m_i$  の幾何学的



(a)



(b)

図 2・16  $m$  が同一平面上にある場合の  $\tilde{\mu}_{Ten}$  ,  $\tilde{\mu}_{Tor}$  の値

な配置を考えることによって(2・34)，(2・35)式より求まり，(2・36)式より $\tilde{\mu}_{\text{Ten}}$ が計算される。 $m$ の数 $n_m$ の種々の値に対する $\tilde{\mu}_{\text{Ten}}$ の計算結果を図2・16(a)に示す。

$$2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2 \quad \tilde{\mu}_{\text{Tor}}$$

次にねじりの場合には，ここで二次元的な配置を考えていること，および(2・37)式の $\mu_{\text{Tor}}^{(i)}$ が $\theta_1 = 0$ で最大をとることから，このとき働くすべりとしては，方位代表としてとった $m_1$ のみを考えればよい。また， $\lambda$ の積分範囲は今の場合 $0 \leq \lambda \leq \pi/2$ を考えれば十分である。(2・63)式で与えられる $\Delta\theta$ を用いると，(2・37)，(2・39)式より $\tilde{\mu}_{\text{Tor}}$ は，

$$\tilde{\mu}_{\text{Tor}} = \frac{6}{\pi \sin^3 \Delta\theta} I(\Delta\theta, \pi/2) \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 64)$$

となる。数値計算により， $\Delta\theta$ の変化に対する $\tilde{\mu}_{\text{Tor}}$ の変化を(2・64)式から求めた結果を図2・16(b)に示す。(ねじりの場合，働くすべりが代表として考えている $m_1$ であるため， $\tilde{\mu}_{\text{Tor}}$ を $\Delta\theta$ に対して連続的に求めることができる。)

$$2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \quad \tau/\sigma$$

以上得られた $\tilde{\mu}_{\text{Ten}}$ および $\tilde{\mu}_{\text{Tor}}$ の値(図2・16)から，(2・3)式によって各 $n_m$ に対する降伏応力比 $\tau/\sigma$ を求めると図2・17のようになる。これから， $n_m$ の増加につれて $\tau/\sigma$ の値が減少することがわかる。(ただし， $n_m$ が小さいところでの変化，特に $\tau/\sigma$ の値が0.50より小さくなるのは，2次元的な $m$ の配置を仮定したためのもので，あまり重要ではない。)なお， $n_m = \infty$ のときは，2・7・2・3節でものべたように $\tau/\sigma = 0.500$ となる。

これらの結果と比較すれば，fcc金属あるいはbcc金属の降伏条件がvon Misesの法則とよく一致することも，それらの金属の結晶形にもとづくすべり面，すべり方向の特性に起因していることが結論される。

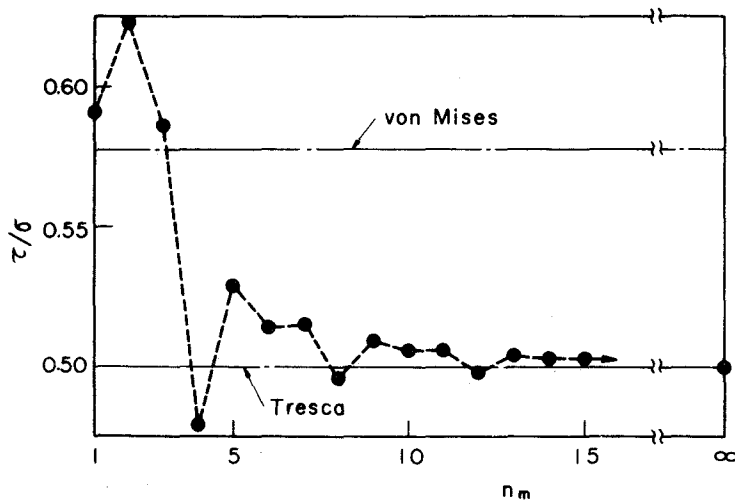


図 2・17  $m$  が同一平面上にある場合の降伏応力比  $\tau/\sigma$  と  $n_m$  の関係

## 文 献

- (1) R. Hill, "塑性学" (昭 25), 17, 培風館.
- (2) C. S. Barrett, "Structure of Metals", (1952), McGraw-Hill.
- (3) 横堀, "材料強度学" (昭 30), 61, 技報堂.
- (4) G. Sachs, VDI-Z, 72 (1928), 734.
- (5) 平, 小寺沢, 善本, 材料, 14-137 (昭 40-2), 143.
- (6) 平, 大谷, 機械学会誌 68-562 (昭 40-11), 1560.
- (7) V. V. Sokolovski, "塑性学", (昭 25), 朝倉書店.
- (8) E. A. Calnan and J. B. Clews, Phil. Mag., 42 (1951), 616.

- (9) H. Gough, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 118 (1928), 498.
- (10) H. S. Choi, C. W. Allen and B. D. Cullity, Trans. AIME, 227 (1963), 331; C. W. Allen and B. D. Cullity, *ibid*, 340.
- (11) 長島, X線材料強度に関する討論会前刷, (昭40), 24, 日本材料学会.
- (12) 大矢根, 小島, 機械学会論文集, 21-111, (昭30), 829.
- (13) F. Garofalo, "Fundamentals of Creep and Creep-Rupture in Metals", (1964), Macmillan.
- (14) B. D. Cullity, "X線回折要論", (1956), アグネ.
- (15) B. I. スミルノフ, "高等数学教程(3)", (昭33), 179, 共立出版.
- (16) U. Dehlinger, Z. Metallkunde, 35, (1943), 182.
- (17) E. Schmid and G. Wassermann, Z. Physik, 42 (1927), 779.
- (18) 鈴木 "転位論入門" (1967), P92 アグネ.
- (19) G. I. Taylor and H. Quinney, Phil. Trans. Roy. Soc., Ser. A 230 (1931), 323.
- (20) J. L. M. Morrison, Proc. Inst. Mech. Engr., 142 (1940), 193.
- (21) W. Prager and P. G. Hodge, "塑性学", (昭26), 17, 丸善.
- (22) H. Hencky, Z. AMM, 4 (1924), 323.
- (23) A. Nadai, "Theory of Flow and Fracture of Solids", (1950), 99, McGraw-Hill.

- (24) O. Hoffman and G. Sachs, "Introduction to the Theory of Plasticity for Engineers", (1953), 55, McGraw-Hill.
- (25) W. Heisenberg, "現代物理学の自然像", (昭 30), 30, みすず.
- (26) G. I. Taylor, J. Inst. Metals, 62 (1938), 307.
- (27) J. F. W. Bishop and R. Hill, Phil. Mag., 42 (1951), 414 & 1298.
- (28) T. H. Lin J. Mech. Phys. Solids., 5 (1957), 143.
- (29) J. W. Hutchinson, J. Mech. Phys. Solids, 12 (1964), 25.
- (30) Z. Hashin, Appl. Mech. Rev., 17 (1964), 1.



## 第3章 多結晶金属の変形の解析

### 3.1 緒 言

先に第1章でのべたように、塑性変形において、材料の受けるひずみが次第に大きくなると、多結晶体の変形 model としては Sachs model が不適當となり、銅のように異方性の大きい材料では、結晶の加工硬化率  $K$  の方位による差異を考慮した図1・29に示すような model を考える必要が生ずる。

ところで一般に、単結晶と多結晶の変形の相関関係を検討するには、次の二つの段階があると考えられる。

- (a) 任意の方位の単結晶内におけるすべりとその単結晶の応力-ひずみ曲線の関係
- (b) 方位によって異なる応力-ひずみ曲線をもつ単結晶と、その集合体である多結晶体の変形挙動との関係

これらの内で、(a)については単結晶についての実験的研究とともに転位論などによって解明されねばならない問題であると考えられるが、本研究においては(b)の立場から考察を加える。

結晶の方位によって応力-ひずみ曲線が異なるような結晶からなる多結晶体を変形させたとき、材料中には一般に応力とひずみの分布を生じる。多結晶体の中で、変形時に応力が一定になるのかそれともひずみが一定になるのかという点に関しては、従来からいろいろ論議されているが、これには極端な二つの場合として、ひずみ一定の考え方と応力一定の考え方とがある。<sup>(1)</sup> 弾性領域で言うと、一軸変形に対しては前者に対応するものは Voigt 模型<sup>(1)</sup> 後者に対応するものは Reuss 模型<sup>(2)</sup> と呼ばれる。これに対して、大久保ら<sup>(3)</sup> は2次元的に弾性異方性を持つ材料の一軸引張りにおける応力とひずみ

を弾性計算から推定し、応力一定の条件に近い傾向にあることを示している。一方実験的には、炭素による弾性域での実験<sup>(4)</sup>で一定応力近似がよい結果を与えること、あるいはX線による弾性率の測定で測定結果が応力一定とひずみ一定の平均値とよく一致すること<sup>(5)</sup>、などの報告がなされている。これに反して従来の結晶塑性の解析では、一般にひずみ一定の仮定が用いられている。現在までのところこれらの問題については未解決の点も多く、また従来の考え方ではいずれも結晶粒度の影響については考慮されていない。

異方性を持つ結晶粒の集合体の変形を考える場合には、常に結晶粒相互の拘束の問題を考える必要がある。ここでは結晶粒相互の拘束率なる概念を導入し、多結晶体中の応力とひずみの分布、あるいは粒界の影響などについて、先の図1・29に示す多結晶の変形 model を用いてエネルギー的な観点から検討を加える。

以下においては一軸変形を考え、また簡単のため各結晶粒の形は図3・1に示すように、同一体積の立方体であると考え。まず、3・2節においては応力-ひずみ関係が直線的である場合をとりあげ基本的な関係式を導入し考察を加える。次に3・3節において、応力-ひずみ関係が指数関数形である場合に解析を拡張する。さらに3・4節においては、結晶塑性の問題がX線回折線の peak shift の回折面依存性にどのように現われるかを解析的に検討する。

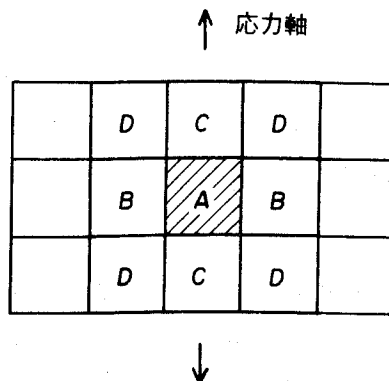


図3・1 多結晶体の model

### 3・2 直線硬化型異方性材料の場合

#### 3・2・1 基本的な関係式

まず，以後にのべる変形の解析に必要な関係式を導いておく。ここでは，  
図3・2に示すような応力軸に垂直な面に沿って並ぶ結晶粒を考える。

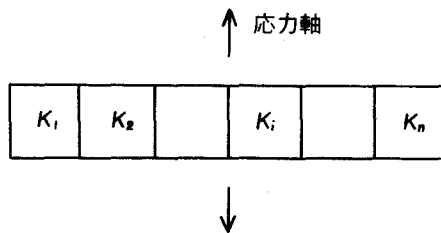


図3・2 多結晶体の model

##### 3・2・1・1 硬化率 $K$

まず，任意の結晶の応力－ひずみ関係を示す勾配を  $K$  とする。すなわち，  
図3・2の各結晶粒はそれぞれ異なった  $K$  の値 ( $K_i$ ) を持つものとする。  
一般に，

$$\sigma = K \epsilon \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 1)$$

$$K = \tilde{K} + \Delta K \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 2)$$

の関係が成り立つ(図3・3参照)。ここに， $\sigma$ ， $\epsilon$  はそれぞれ各結晶粒の  
応力，ひずみである。 $\tilde{K}$  は全ての方位の結晶についての  $K$  の平均である  
( $\tilde{K}$  の定義については後にのべる)。

##### 3・2・1・2 拘束率 $\eta$ の導入

さて，結晶粒相互の拘束の問題を考えるために，まず任意の二つの結晶  $i$   
と  $j$  を選んで，それらの間の関係について検討する。一般的に応力－ひず  
み曲線を表わす関係を  $F$  とすると，二つの結晶の応力差は，

$$\sigma_i - \sigma_j = F_i(\epsilon_i) - F_j(\epsilon_j) \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 3)$$

となる。この式からもわかるように、 $F_i \neq F_j$  すなわち異方性のある場合には、 $\epsilon_i = \epsilon_j$  であっても  $\sigma_i = \sigma_j$  とはならず、一般に結晶粒相互にひずみ分布あるいは応力の分布を生ずる。応力-ひずみ曲線が(3・1)式のように直線的に表わされる場合には、

$$\begin{aligned}\sigma_i - \sigma_j &= K_i \epsilon_i - K_j \epsilon_j \\ &= (K_i - K_j) \epsilon_i + K_j (\epsilon_i - \epsilon_j) \dots\dots\dots (3 \cdot 4)\end{aligned}$$

ここで

$$\Delta \sigma = \sigma_i - \sigma_j, \quad \Delta K = K_i - K_j, \quad \Delta \epsilon = \epsilon_i - \epsilon_j \dots\dots\dots (3 \cdot 5)$$

とおくと、(3・4)式は

$$\Delta \sigma = \Delta K \epsilon_i + K_j \Delta \epsilon \dots\dots\dots (3 \cdot 6)$$

となる。

さて次に、結晶粒相互の拘束の問題を解析的に取り扱うために、拘束率 $\eta$ を導入し、今後この $\eta$ の数値によって拘束の状態を表わすものとする。

(3・6)式において、 $\Delta \sigma = 0$  とすると $\Delta \epsilon$ の最大値は、

$$(\Delta \epsilon)_{\max} = \frac{-\Delta K}{K_j + \Delta K} \epsilon_j \dots\dots\dots (3 \cdot 7)$$

となる。そこで、 $\Delta \epsilon$ を実際の結晶に生ずるひずみとしたとき、拘束率 $\eta$ を次のように定義する。

$$\eta = \frac{\Delta \epsilon}{(\Delta \epsilon)_{\max}} \dots\dots\dots (3 \cdot 8)$$

ただし後にのべるように、 $(\Delta \epsilon)_{\max}$ は $\eta$ の値によって幾分変化する。

以下では物理的な意味から考えて、 $0 \leq \eta \leq 1$ の領域を考え、また $\eta$ の値は $\Delta K$ の値によって変化しないものと仮定する。上の定義から、

$$\left. \begin{array}{ll} \eta = 0 & : \text{ひずみ一定} \\ \eta = 1 & : \text{応力一定} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (3 \cdot 9)$$

にそれぞれ対応する。(3・7), (3・8)式から,

$$\Delta \epsilon = \frac{-\eta \Delta K}{K_j + \Delta K} \epsilon_j \dots\dots\dots (3 \cdot 10)$$

これらの関係を  $\sigma - \epsilon$  線図上で示すと, 一般に図 3・3 のように表わすことができる。

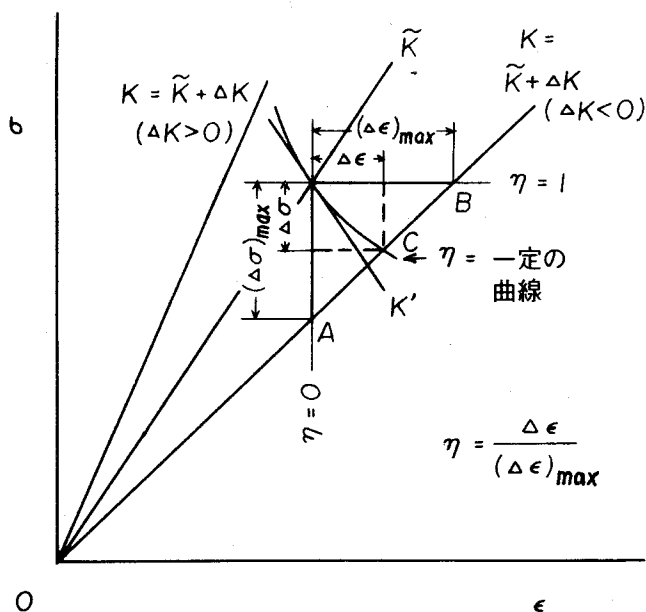


図 3・3 応力一ひずみ線図上における  $K$ ,  $\eta$ ,  $\Delta\sigma$ ,  $\Delta\epsilon$  および  $K'$  の関係

図 3・3 において,  $\tilde{K}$  はすべての方位についての  $K$  の平均であって, 多結晶体全体としての挙動を示す。さて, 多結晶体が全体としてひずみ  $\tilde{\epsilon}$  を受けているとき, その中のある任意の結晶を考え, そのもつ硬化率を  $K$  ( $K = \tilde{K} + \Delta K$ ) とすると, その結晶は  $\sigma - \epsilon$  線図上でこう配  $K$  の線上を变形とともに進む。この結晶は, ひずみ一定の条件 ( $\eta = 0$ ) では  $A$  点まで, 応力一定の条件 ( $\eta = 1$ ) では  $B$  点まで達するが, 一般には任意の  $\eta$  の値の  $C$  点にあると考えられる。このとき,  $\eta$  は (3・8) 式の関係で与えられる。

この  $\eta$  を用いると、次のような関係式が導かれる。

$$\begin{aligned}\Delta\sigma &= (1-\eta)\Delta K \varepsilon_j \\ &= (1-\eta)(\Delta\sigma)_{\max} \dots\dots\dots (3\cdot11)\end{aligned}$$

この関係がなりたつことは図 3・3 から明らかなである。(3・11)式は(3・6)式を拘束率  $\eta$  を用いて簡略に書き表わした式であると言える。

ここで以後に一般的な取り扱いを行なうために、i 結晶を任意の一つの結晶粒とし、他方 j 結晶の代わりにすべての方位の結晶粒についての平均値(記号の頭の波線で示す)をとる。すなわち、応力、ひずみの平均値  $\widetilde{\sigma}$ ,  $\widetilde{\varepsilon}$  はそれぞれ、

$$\widetilde{\sigma} = \int \sigma \, d\Omega, \quad \widetilde{\varepsilon} = \int \varepsilon \, d\Omega \dots\dots\dots (3\cdot12)$$

で表わされる。ここに、 $d\Omega$  は方位についての積分で、 $\int d\Omega = 1$ 、すなわち正規化されているものとする。いいかえると、 $\int d\Omega$  は全ての方位の結晶について平均をとることを表わす。一般に、

$$\left. \begin{aligned}\varepsilon &= \widetilde{\varepsilon} + \Delta\varepsilon \\ \sigma &= \widetilde{\sigma} + \Delta\sigma\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3\cdot13)$$

の関係があるから、(3・10)(3・11)式に対応して、

$$\Delta\varepsilon = \frac{-\eta\Delta K}{\widetilde{K} + \Delta K} \widetilde{\varepsilon} \dots\dots\dots (3\cdot14)$$

$$\begin{aligned}\Delta\sigma &= (1-\eta)\Delta K \widetilde{\varepsilon} = (1-\eta)(\Delta\sigma)_{\max} \\ &\dots\dots\dots (3\cdot15)\end{aligned}$$

となる。

### 3・2・1・3 $\eta$ の物理的意味

変形に際して各結晶の拘束率  $\eta$  が  $\Delta K$  の値にかかわらず一定であるとする、 $\sigma - \varepsilon$  線図上で  $K$  の値の異なった種々の結晶が占める位置を結ぶ線

は一般に曲線となる。(図 3・3)。この曲線を今  $\tilde{K}$  の線との交点における勾配  $K'$  の接線で近似すると、

$$K' = \left. \frac{\partial(\Delta\sigma)}{\partial(\Delta\epsilon)} \right|_{\Delta K=0} \dots\dots\dots (3 \cdot 16)$$

であるから、(3・14)、(3・15)式を用いて、

$$\left. \begin{aligned} K' &= -\frac{(1-\eta)}{\eta} \tilde{K} \\ \text{あるいは} \\ \eta &= \frac{\tilde{K}}{\tilde{K} - K'} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3 \cdot 17)$$

となる。すなわち、 $\eta$  は  $\sigma - \epsilon$  線図上では勾配  $K'$  と対応するものであることがわかる。

#### 3・2・1・4 $K$ の平均値： $\tilde{K}$

$K$  の平均値は一般には拘束率  $\eta$  によって異なって来る(図 3・4 参照)。そこで以下においては、任意の  $\eta$  の値のときの  $K$  の平均値  $\tilde{K}$  について考える。

一般的に、(3・1)式より次の関係が成立つ。

$$\int (\sigma - K\epsilon) d\Omega = 0 \dots\dots\dots (3 \cdot 18)$$

さて、ひずみ一定のときの平均を  $\tilde{K}_\epsilon$  と表わすものとする、(3・18)式より、

$$\tilde{K}_\epsilon = \int K d\Omega \dots\dots\dots (3 \cdot 19)$$

となる。一方、応力一定の条件での  $K$  の平均を  $\tilde{K}_\sigma$  と記すと、同じく(3・18)式より、

$$\tilde{K}_\sigma = 1 / \int \frac{1}{K} d\Omega \dots\dots\dots (3 \cdot 20)$$

の関係が導ける。

一般の場合には、(3・8)，(3・15) 式を (3・18) 式に代入すると，

$$\int \{ \tilde{\sigma} + (1-\eta)(\Delta\sigma)_{\max} - K(\tilde{\varepsilon} + \eta(\Delta\varepsilon)_{\max}) \} d\Omega = 0$$

.....(3・21)

ここで， $\tilde{\sigma}$  の定義より  $\int (\Delta\sigma)_{\max} d\Omega = 0$  であるから，(3・19) 式を用いて (3・21) 式は，

$$\tilde{\sigma} - \tilde{K}_{\varepsilon} \tilde{\varepsilon} - \eta \int K(\Delta\varepsilon)_{\max} d\Omega = 0 \quad \text{.....(3・22)}$$

となる。今，応力一定 ( $\eta = 1$ ) の場合を考えると，

$$\sigma = \tilde{K}_{\sigma} \tilde{\varepsilon} = \tilde{K}_{\varepsilon} \tilde{\varepsilon} + \int K(\Delta\varepsilon)_{\max} d\Omega \quad \text{.....(3・23)}$$

ここに， $K = \tilde{K}_{\varepsilon} + \Delta K_{\varepsilon}$  ( $\Delta K_{\varepsilon}$  はひずみ一定の条件のときの  $\Delta K$  の値) を代入すると， $\int (\Delta\varepsilon)_{\max} d\Omega = 0$  であるから，

$$\tilde{K}_{\varepsilon} - \tilde{K}_{\sigma} = -\frac{1}{\varepsilon} \int \Delta K_{\varepsilon} (\Delta\varepsilon)_{\max} d\Omega \quad \text{.....(3・24)}$$

一方，(3・8)，(3・14) 式より，

$$\frac{(\Delta\varepsilon)_{\max}}{\tilde{\varepsilon}} = \frac{\Delta K}{K} \cong \frac{\Delta K_{\varepsilon}}{\tilde{K}_{\varepsilon}} \quad \text{.....(3・25)}$$

と書けるから，(3・25) 式を (3・24) 式に代入すると，

$$\tilde{K}_{\varepsilon} - \tilde{K}_{\sigma} \cong \frac{1}{\tilde{K}_{\varepsilon}} \int (\Delta K_{\varepsilon})^2 d\Omega \quad \text{.....(3・26)}$$

となる。ここで，一般の場合の  $\tilde{K}$  を

$$\tilde{\sigma} = \tilde{K} \tilde{\varepsilon} \quad \text{.....(3・27)}$$

により定義し，



$$\int (\Delta K_\varepsilon)^2 d\Omega \equiv \widetilde{(\Delta K_\varepsilon)^2} \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 28)$$

とおくと, (3・22), (3・23), (3・26), (3・27), (3・28) 式より一般の  $\eta$  の値に対する  $K$  の平均値  $\widetilde{K}$  を次のような形に書き表わすことができる。

$$\widetilde{K} = \widetilde{K}_\varepsilon + \eta (\widetilde{K}_\sigma - \widetilde{K}_\varepsilon)$$

$$\widetilde{K} = \widetilde{K}_\sigma + (1-\eta) \frac{\widetilde{(\Delta K_\varepsilon)^2}}{\widetilde{K}_\varepsilon} \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 29)$$

すなわち,  $\widetilde{K}$  は  $\eta$  の値に比例して変化することがわかる。以上の関係を図式的に示したのが図 3・4 である。

なお, この結果を弾性領域にあてはめれば, Young 率を  $E$  としたとき次の関係が成立つ。

$$\widetilde{E} = \widetilde{E}_\varepsilon + \eta (\widetilde{E}_\sigma - \widetilde{E}_\varepsilon)$$

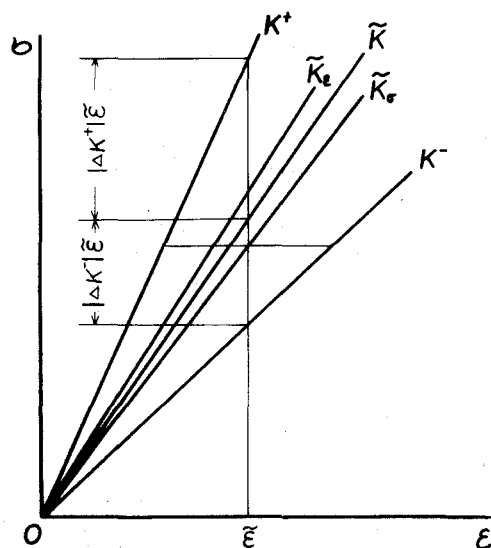


図 3・4  $K$  の平均値:  $\widetilde{K}$  (図式的)

### 3・2・1・5 $\Delta K$

さて次に、 $\Delta K$ についても一般の  $\eta$  の値に対しての表式を導いておく必要がある。定義より、

$$K = \widetilde{K} + \Delta K = \widetilde{K}_\varepsilon + \Delta K_\varepsilon = \widetilde{K}_\sigma + \Delta K_\sigma \quad \dots\dots\dots(3 \cdot 30)$$

が成立つから、ここで  $\Delta K > 0$  および  $\Delta K < 0$  の結晶粒に対応する値をそれぞれ各記号の右肩に+および-の印をつけて表わすものとする、(3・26) (3・28) 式より、

$$\begin{aligned} \left| \Delta K_\sigma^+ \right| - \left| \Delta K_\varepsilon^+ \right| &= \left| \Delta K_\varepsilon^- \right| - \left| \Delta K_\sigma^- \right| \\ &= \widetilde{K}_\varepsilon - \widetilde{K}_\sigma = \frac{\widetilde{(\Delta K_\varepsilon)^2}}{\widetilde{K}_\varepsilon} \quad \dots\dots\dots(3 \cdot 31) \end{aligned}$$

の関係がある。一方、図3・4からもわかるように、

$$\left| \Delta K_\varepsilon^+ \right| = \left| \Delta K_\varepsilon^- \right| \equiv \left| \Delta K_\varepsilon \right|$$

が成り立つから、(3・29)式を用いると、次の関係が成り立つ(図3・4)。

$$\begin{aligned} \left| \Delta K^+ \right| &= K^+ - \widetilde{K} = \left| \Delta K_\varepsilon \right| + \eta \frac{\widetilde{(\Delta K_\varepsilon)^2}}{\widetilde{K}_\varepsilon} \\ \left| \Delta K^- \right| &= \widetilde{K} - K^- = \left| \Delta K_\varepsilon \right| - \eta \frac{\widetilde{(\Delta K_\varepsilon)^2}}{\widetilde{K}_\varepsilon} \quad \dots\dots\dots(3 \cdot 32) \end{aligned}$$

### 3・2・2 粒界においてひずみの拘束がない場合の多結晶体の変形

拘束率  $\eta$  が実際にどの程度の値をとるかということは興味ある問題であるが、これは粒界における結晶粒相互の拘束の状態に依存すると予想される。しかしながら、結晶粒相互の拘束の微視的な機構は双方の結晶粒の方位、あるいは応力軸や粒界面などの相対的な方位関係などによって影響を受け、複

雑な挙動を示すと考えられる。そこで、ここではエネルギー的な見地から、現象論的に検討を加えることを試みる。はじめに、粒間において拘束力が働かない場合、すなわち粒界で結晶粒が相互に自由にすべり得る場合を仮想的に考える。また、多結晶体は図3・2に示すような model にもとずいて考えるものとする。

簡単のためまず、結晶粒が二つのみからなる系の変形挙動を考え、その後一般の多結晶体に拡張することにする。今、図3・5に示すように、二つの結晶粒の応力-ひずみ線図の勾配をそれぞれ  $K^+$  ( $K^+ > \tilde{K}$ ) および  $K^-$  ( $K^- < \tilde{K}$ ) とし、これらからなる系の変形エネルギー  $W'$  を考える。

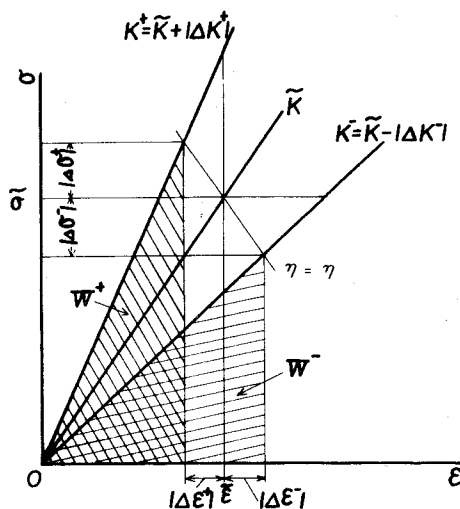


図3・5 結晶粒のひずみエネルギー (図式的)

ここで、 $\Delta K > 0$  および  $\Delta K < 0$  の結晶粒のエネルギーをそれぞれ  $W^+$  および  $W^-$  と記す。 $\Delta K$  の分布が対称的であるとすると、 $W'$  はこれら二つの和として次のような形に表わせる (図3・5)。

$$\begin{aligned}
 W' &= \frac{1}{2} (W^+ + W^-) \\
 &= \frac{1}{4} \{ (\tilde{\sigma} + |\Delta\sigma|)(\tilde{\varepsilon} - |\Delta\varepsilon|) + (\tilde{\sigma} - |\Delta\sigma|)(\tilde{\varepsilon} + |\Delta\varepsilon|) \} \\
 &= \frac{1}{2} (\tilde{\sigma} \tilde{\varepsilon} - |\Delta\sigma| |\Delta\varepsilon|) \dots\dots\dots (3 \cdot 33)
 \end{aligned}$$

(ただし、エネルギーは考えている系の単位体積あたりについて考えるものとする。なお、ここでは一軸変形における横隣りの結晶粒の拘束を考えているから、これはまた応力軸に直角な面上の単位面積あたりと考えてもよい。)(3・33)式の右辺第2項は(3・15)式より

$$\begin{aligned} |\Delta \sigma| |\Delta \epsilon| &\cong \eta (1-\eta) \frac{(\Delta K)^2}{K} \tilde{\epsilon}^2 \\ &\cong \eta (1-\eta) \frac{(\Delta K_{\epsilon})^2}{\tilde{K}_{\epsilon}} \tilde{\epsilon}^2 \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 34) \end{aligned}$$

となる。したがって、(3・29)、(3・34)式を(3・33)式に代入して、結局、

$$W' = \frac{1}{2} \left\{ \tilde{K}_{\sigma} \tilde{\epsilon}^2 + (1-\eta)^2 \frac{(\Delta K_{\epsilon})^2}{\tilde{K}_{\epsilon}} \tilde{\epsilon}^2 \right\} \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 35)$$

が得られる。(なお以上の式は、 $\eta$  のかわりに(3・17)式で与えられる $K'$ を用いても同様に書き表わすことができる。)

次に、この二つの結晶粒についての結果を多数の結晶粒からなる系に拡張する。そのためには、(3・35)式の右辺の $(\Delta K_{\epsilon})^2$ のかわりに、(3・28)式で定義された多くの結晶の平均の値、 $\widetilde{(\Delta K_{\epsilon})^2}$ を用いる必要がある。すなわち、多くの結晶からなる系の変形エネルギーを $W$ とすると、(3・35)式の $W'$ は単位体積あたりを考えているから、次のように $W$ を求めることができる。

$$\begin{aligned} W &= \int W' d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \tilde{K}_{\sigma} \tilde{\epsilon}^2 + (1-\eta)^2 \frac{\widetilde{(\Delta K_{\epsilon})^2}}{\tilde{K}_{\epsilon}} \tilde{\epsilon}^2 \right\} \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 36) \end{aligned}$$

これが求める一般式である。

(3・36)式からわかるように、 $W$ は  $\eta = 1$  ( $K' = 0$ ) のとき最小値  $W = W_\sigma = \frac{1}{2} \widetilde{K}_\sigma \widetilde{\epsilon}^2$  をとる。すなわちこれは、結晶粒相互の拘束力を考えなければ、エネルギー的には応力一定の状態が安定であることを示しており、興味深い。 $W$ の最大値は  $\eta = 0$  ( $K = -\infty$ )、すなわちひずみ一定のときで、 $W = W_\epsilon = \frac{1}{2} \widetilde{K}_\epsilon \widetilde{\epsilon}^2$  となる。先にのべたように、多結晶の変形が応力一定の条件に近いことが実験的に報告されているが、これもエネルギー的により安定であることに由来していると考えられる。

同じく(3・36)式から、 $(\Delta K_\epsilon)^2$  の値が同じ場合には  $\widetilde{K}_\epsilon$  が大きいほど、両者の差  $W_\epsilon - W_\sigma = (\Delta K_\epsilon)^2 \widetilde{\epsilon}^2 / 2 \widetilde{K}_\epsilon$  は小さくなることがわかる。一般に、 $(\Delta K_\epsilon)^2$  は  $\Delta K_\epsilon$  の分布状態によって変化する。さらに以上の計算では  $\eta$  は  $\Delta K$  の値に依存しないと仮定したが、より一般的には上の結果の式中の  $\eta$  は平均値  $\bar{\eta}$  を意味すると解釈される。

ところで先に、結晶粒の形を図3・1に示すような立方体と仮定したが、以上のべた拘束のない場合の計算に関するかぎり、このことは必ずしも必要ではない。ただし、実際の多結晶体に適用する場合には、結晶粒の大きさの分布が  $\Delta K$  の分布に対して一様である必要がある。

### 3・2・3 粒界においてひずみが拘束される場合の多結晶体の変形

さて、以上においては粒間において結晶粒相互の作用は全くないとしたが実際には結晶粒は隣りの結晶粒とひずみが連続しており、相互に力を及ぼし合っている。すなわち、異方性をもつ単結晶からなる多結晶集合体では一般に隣りの結晶と  $K$  あるいは  $\Delta K$  の値が等しくなく、したがって(3・14)式からわかるように隣相う結晶粒の間にはひずみ差を生じる。そこで以下においては、結晶粒相互の粒界近傍における拘束による仕事、すなわち拘束による多結晶体の変形エネルギーの増加について考える。

一般に先の図3・1のような多結晶modelを考えると、任意の結晶粒Aは、B、C、Dなどの結晶粒によって取り囲まれている。ここで一軸応力を

受ける場合を考えると，結晶粒 A の変形を最も強く規定するのは，隣りの結晶 B であると考えることができる。したがって本解析においては，結晶粒相互の拘束の第 1 近似として，横隣りの結晶による拘束のみを考えることにしまた軸方向の垂直ひずみの影響についてのみ考えることにする。すなわち以下においては，図 3・2 に示すような多結晶体の model について考えていく。

今，立方体的に積み重なった多結晶体を一軸変形させる場合を考えると，応力軸方向から見たときの結晶の配置（図 3・6）からもわかるように，隣り合った結晶粒による拘束

としては周囲の四つの結晶が考えられる。以下においてはまず，それらの内の一つの結晶粒界を任意に代表として選んで考える。すなわち，

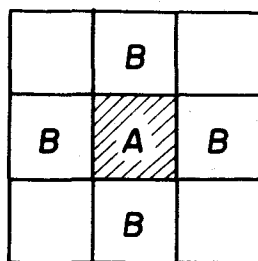


図 3・6 応力軸方向から見た結晶粒の配置

図 3・7 に示すように，二つの結晶粒 I と J との境界を考える。2 つの

結晶粒の  $K$  の値をそれぞれ  $K_i$  および  $K_j$  とし，それらの差を  $2\Delta K_{ij}$  と記す。

$$2\Delta K_{ij} = K_i - K_j \quad \dots\dots\dots(3\cdot37)$$

さて粒界をはさむ二つの結晶粒の挙動を考えると，前節でのべた二つの結晶についての変形エネルギー  $W'$  に関する議論をそのままあてはめることができる。すなわち，粒界での拘束に関しては，粒界をはさみ，硬化率  $K_i$  と  $K_j$  をもつ二つの結晶およびその平均値  $\bar{K}$  について考えればよい。

以下，応力-ひずみ線上で考えていく。まず図 3・8(a) に示すように，多結晶全体の  $K$  の平均値を  $\bar{K}$  とし，それらが拘束率  $\eta$  の状態にあるものとする。（すなわち， $\eta$  = 一定の曲線上あるいは近似的に言えば (3・17)

式で与えられる  $K'$  の勾配をもつ直線上に各結晶粒が位置しているものとする。) 硬化率  $K_i$  と  $K_j$  をもつ2個の結晶粒はそれぞれ I および J という点に位置する。したがって、それらの境界で生じるひずみ差は(3・8), (3・13), (3・25), (3・37)式から,

$$\begin{aligned}
 2\Delta\epsilon_{ij} &= \epsilon_i - \epsilon_j = \Delta\epsilon_i - \Delta\epsilon_j \\
 &\cong -\eta \left\{ \frac{(\Delta K_\epsilon)_i}{\widetilde{K}_\epsilon} - \frac{(\Delta K_\epsilon)_j}{\widetilde{K}_\epsilon} \right\} \widetilde{\epsilon} \\
 &= -2\eta \frac{\Delta K_{ij}}{\widetilde{K}_\epsilon} \widetilde{\epsilon} \dots\dots\dots(3 \cdot 38)
 \end{aligned}$$

で与えられる。粒界においてひずみが連続になるためには、粒界で二つの結晶のひずみが等しくなる必要があり、したがって粒界では  $\eta = 0$  となるべきである。図3・8 (a)の円内を拡大した図3・8 (b)にこの関係を示すが、多結晶全体としての状態は一定のままであるから、I と J 結晶の平均は多結晶全体としての  $\eta = \text{一定}$  の曲線上に位置したままで、それぞれの結晶は粒界で

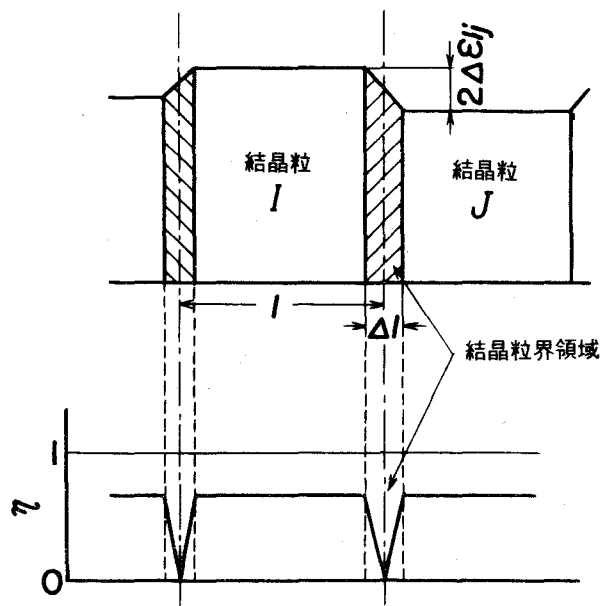
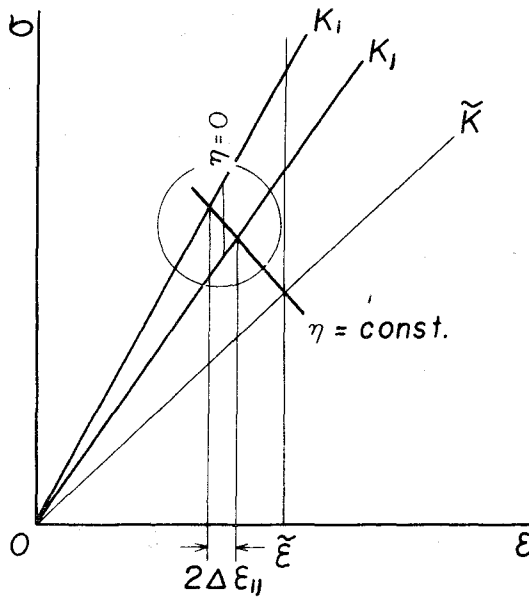
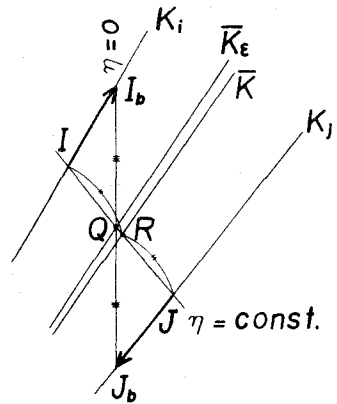


図3・7 粒界領域のひずみと拘束率  
(図式的)



(a)



(b)

図 3・8 応力 — ひずみ線図上での粒界部分の挙動

は  $\eta = 0$  の位置をとる (図 3・7)。すなわち、I および J 結晶の粒界は図 3・8 (b) に示す  $\sigma - \epsilon$  線図上で、それぞれ  $I_b$  および  $J_b$  の位置をとる。(なお、平均の位置はこれにつれて、 $\eta = \text{一定}$  の曲線上を R 点から Q 点まで移動する。) またこのとき粒界の両側での応力については、 $|\Delta \sigma_{ij}| = |\Delta \sigma_{ji}|$  で等しくなり、応力軸方向の垂直応力成分に関しては粒界における力の釣合いの条件は満たされている。

さて次に、粒界でひずみを連続的に変化させるために必要なエネルギーを考える。先の (3・37) 式の  $W'$  は多結晶中の任意の二つの結晶について求めたものであったが、これを二つの結晶のみからなる系にあてはめる。すなわち、二つの結晶 I と J についての  $K$  と  $\epsilon$  の平均値をそれぞれ  $\bar{K}$ 、 $\bar{\epsilon}$  と表わすことにすると、その場合のエネルギー  $\bar{W}$  は (3・35) 式より、



$$\bar{W}(\eta) = \frac{1}{2} \left\{ \bar{K}_\sigma \bar{\epsilon}^2 + (1-\eta)^2 \frac{(\Delta K_{ij})^2}{\bar{K}_\epsilon} \bar{\epsilon}^{-2} \right\} \dots\dots\dots (3 \cdot 39)$$

となる。この系において、拘束率が  $\eta = \eta$  から  $\eta = \eta'$  ( $\eta' < \eta$ ) まで変化した場合のエネルギーの増加を  $\Delta W$  とすると、

$$\begin{aligned} \Delta W &= \bar{W}(\eta') - \bar{W}(\eta) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (1-\eta')^2 - (1-\eta)^2 \right\} \frac{(\Delta K_{ij})^2}{\bar{K}_\epsilon} \bar{\epsilon}^{-2} \end{aligned} \dots\dots\dots (3 \cdot 40)$$

が得られる。ここで図 3・7 に示すように、粒界部分のひずみ  $\epsilon$  の変化すなわち  $\eta$  の変化が直線的であると仮定し、粒界部分の幅が各結晶でそれぞれ  $\Delta \ell / 2$  であるとし、 $x$  を粒界からの距離とすると、

$$\eta' = \eta \frac{x}{\Delta \ell / 2} \quad (0 \leq x \leq \Delta \ell / 2) \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 41)$$

の関係が成り立つから、一つの粒界についてのエネルギー  $W_b''$  は (3・40) 式から、

$$W_b'' = 2 \int_0^{\Delta \ell / 2} \Delta W dx = \frac{\Delta \ell}{\eta} \int_0^\eta \Delta W d\eta' \dots\dots\dots (3 \cdot 42)$$

となる。一つの結晶は一つの粒界について  $W_b''/2$  のエネルギーをもつが、考えている粒界は一つの結晶について四つあるから (図 3・6), 結晶粒の一辺の長さを  $\ell$  とすれば、単位体積あたりのエネルギー  $W_b'$  は、

$$W'_b = \frac{2\ell}{\ell^2} W_b = \frac{2\Delta\ell}{\eta\ell} \int_0^\eta \Delta W d\eta' \dots\dots\dots (3 \cdot 43)$$

ここで、

$$P = \Delta\ell/\ell \dots\dots\dots (3 \cdot 44)$$

とおき、 $P$  を粒界部分の占める割合とする。  $P$  は一般に  $\eta$  の値によって変わると考えられる。 今この点を考慮するために、 $\eta = 1$  のときの  $P$  を  $P_1$  と記すと、

$$P = \eta P_1 \dots\dots\dots (3 \cdot 45)$$

と書ける。 (すなわち、 $\eta$  の値によって図 3・7 に示す粒界部分のひずみを受ける領域の大きさが変化する。) よって、

$$\begin{aligned} W'_b &= 2P_1 \int_0^\eta \Delta W d\eta' \\ &= P_1 \eta^2 \left(1 - \frac{2}{3}\eta\right) \frac{(\Delta K_{ij})^2}{\bar{K}_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^2} \dots\dots\dots (3 \cdot 46) \end{aligned}$$

したがって、多結晶全体としての粒界部分のエネルギー  $W_b$  は、粒界領域の割合  $P_1$  の多結晶全体での平均を  $\tilde{P}_1$  とすると、 $\bar{K}$  は  $\tilde{K}$  に  $\varepsilon^2$  は  $\tilde{\varepsilon}^2$  にそれぞれ近づくから、

$$\begin{aligned} W_b &= \int W'_b d\Omega \\ &= \tilde{P}_1 \eta^2 \left(1 - \frac{2}{3}\eta\right) \left\{ \frac{\overline{(\Delta K_{ij})^2}}{\tilde{K}_\varepsilon} + o\left(\frac{\overline{(\Delta K_{ij})^2}}{\tilde{K}_\varepsilon}\right) \right\} \tilde{\varepsilon}^2 \\ &\dots\dots\dots (3 \cdot 47) \end{aligned}$$

ただしここに,

$$\overline{(\Delta K_{ij})^2} \equiv \int (\Delta K_{ij})^2 d\Omega \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 48)$$

したがって, 多結晶全体としての変形エネルギー  $W_t$  は, (3.36), (3.47) 式より,

$$W_t = W + W_b$$

$$\sim \frac{1}{2} \widetilde{K}_\sigma \widetilde{\epsilon}^2 + \frac{1}{2} (1-\eta)^2 \frac{\overline{(\Delta K_\epsilon)^2}}{\widetilde{K}_\epsilon} \widetilde{\epsilon}^2 + \widetilde{P}_1 \eta (1-\frac{2}{3}\eta) \frac{\overline{(\Delta K_{ij})^2}}{\widetilde{K}_\epsilon} \widetilde{\epsilon}^2$$

$$\dots\dots\dots (3 \cdot 49)$$

で与えられる。ここで,  $\partial W_t / \partial \eta = 0$  において  $W_t$  が極小値をとる  $\eta$  の値を求めると,

$$(1-\eta) \{ 2 \widetilde{P}_1 \eta \overline{(\Delta K_{ij})^2} - \overline{(\Delta K_\epsilon)^2} \} = 0 \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 50)$$

ところで,  $0 \leq \eta \leq 1$  であるから,

$$\eta = \min \left( 1, \frac{\overline{(\Delta K_\epsilon)^2}}{2 \widetilde{P}_1 \overline{(\Delta K_{ij})^2}} \right) \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 51)$$

となる。

(3.51)式からわかるように, 一般に  $\widetilde{P}_1$  の値が大きくなると  $\eta$  は減少し,  $\widetilde{P}_1 = \infty$  は  $\eta = 0$ , すなわち多結晶内のひずみが一定という条件に対応する。他方,  $\widetilde{P}_1 = 0$  は前節の拘束のない場合に対応する。

先にのべたように,  $\widetilde{P}_1$  は  $\eta = 1$  と仮定したときの粒界領域のしめる割合であり, 以上の計算では  $\widetilde{P}_1$  を一定と考えた場合について, 粒界の影響の考え方を概略的にのべた。しかしながら, 実際の粒界の挙動はより複雑であり, 種々の因子に影響されると考えられる。したがって  $P_1$  の内容について

もより詳細な検討が必要であり、これは今後の課題である。なお、 $\Delta K$ の分布が一様で random な場合には、簡単な計算によって、(3・51)式において  $\overline{(\Delta K_\epsilon)^2} / \overline{(\Delta K_{ij})^2} = 2$  となることを示すことができる。

### 3・3 指数硬化型異方性材料の場合

#### 3・3・1 基本的な関係式

前節では、応力-ひずみ関係が直線的である場合について考えたが、塑性変形を含む一般の材料の変形を扱うには直線関係の場合のみでは不十分である。一般的に、金属材料の加工硬化曲線は指数関数によってよく表わされることが多くの実験から知られている。したがってここでは、指数硬化型の応力-ひずみ関係をもつ材料に対して先のエネルギー的な解析を拡張する。

ここでも、図3・2に示すような応力軸に垂直な面に沿って並ぶ結晶粒を考えるが、解析の筋道は前節と同様であるので、以下では主として結果についてのみのべる。

##### 3・3・1・1 応力とひずみ

任意の結晶粒の応力-ひずみ関係を次のようにおく。

$$\sigma = k \epsilon^n \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 52)$$

ここに、 $k$ 、 $n$ は材料により定まる定数である。ここで  $\eta$  は結晶粒の方位によらず一定であるとし、 $k$ のみが方位により変化すると仮定する。全ての方位についての  $k$  の平均を  $\tilde{k}$  として、

$$\begin{aligned} k &= \tilde{k} + \Delta k \\ &= \tilde{k} \epsilon + \Delta k \epsilon = \tilde{k} \sigma + \Delta k \sigma \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 53) \end{aligned}$$

ここに、添字  $\epsilon$  および  $\sigma$  はそれぞれひずみ一定および応力一定の条件の下での値を示す。(3・13)、(3・52)式より、

$$\Delta \sigma = \sigma - \tilde{\sigma} = k (\tilde{\epsilon} + \Delta \epsilon)^n - \tilde{k} \tilde{\epsilon}^n$$

ここで  $\tilde{\epsilon} \gg \Delta \epsilon$  と仮定し、 $\Delta \epsilon$  の2次以上の項を無視すると(3・53)式より、

$$\Delta \sigma \cong \Delta k \tilde{\varepsilon}^n + (\tilde{k} + \Delta k) n \tilde{\varepsilon}^{n-1} \Delta \varepsilon \dots\dots\dots (3 \cdot 54)$$

となる。前節と同様にして、

$$\Delta \varepsilon \cong \frac{-\eta \cdot \Delta k}{k \cdot n} \tilde{\varepsilon} \dots\dots\dots (3 \cdot 55)$$

の関係が導けるから、(3・54)式に代入して、

$$\Delta \sigma \cong (1-\eta) \Delta k \tilde{\varepsilon}^n = (1-\eta) (\Delta \sigma)_{\max} \dots\dots\dots (3 \cdot 56)$$

となる (図3・9)。

### 3・3・1・2 $k$ の平均値: $\tilde{k}$

$k$  の平均値  $\tilde{k}$  も拘束率  $\eta$  によって異なる。一般に、 $\tilde{k}$  は(3・52)式より次の形で定義される。

$$\tilde{\sigma} = \tilde{k} \tilde{\varepsilon}^n \dots\dots\dots (3 \cdot 57)$$

また前節と同様に次の関係が成り立つ。

$$\int (\sigma - k \varepsilon^n) d\Omega = 0 \dots\dots\dots (3 \cdot 58)$$

$$\tilde{k} \tilde{\varepsilon} = \int k d\Omega \dots\dots\dots (3 \cdot 59)$$

$$\tilde{k} \tilde{\sigma} = 1 / \left\{ \int \frac{1}{k^n} d\Omega \right\}^n \dots\dots\dots (3 \cdot 60)$$

一般の場合には、(3・12), (3・13)式を(3・59)式に代入すると、

$$\tilde{\sigma} - \int k (\tilde{\varepsilon} + \Delta \varepsilon)^n d\Omega = 0$$

ここで、 $\Delta \varepsilon$  の2次以上の項を無視すると、(3・8), (3・57), (3・59)式より、次の関係を導くことができる。

$$\tilde{k} \cong \tilde{k} \tilde{\varepsilon} + n \eta \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \int k (\Delta \varepsilon)_{\max} d\Omega$$

これから前節と同じく,

$$\begin{aligned}\tilde{k}_\varepsilon - \tilde{k}_\sigma &\cong -n \frac{1}{\tilde{k}_\varepsilon} \int \Delta k_\varepsilon \cdot \Delta \varepsilon_{\max} d\Omega \\ &\cong \frac{1}{\tilde{k}_\varepsilon} \overline{(\Delta k_\varepsilon)^2} \dots\dots\dots (3.61)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k &\cong \tilde{k}_\sigma + (1-\eta)(\tilde{k}_\varepsilon - \tilde{k}_\sigma) \\ &\cong \tilde{k}_\sigma + (1-\eta) \frac{\overline{(\Delta k_\varepsilon)^2}}{\tilde{k}_\varepsilon} \dots\dots\dots (3.62)\end{aligned}$$

ただし,

$$\overline{(\Delta k_\varepsilon)^2} \equiv \int (\Delta k_\varepsilon)^2 d\Omega \dots\dots\dots (3.63)$$

の関係が導ける。

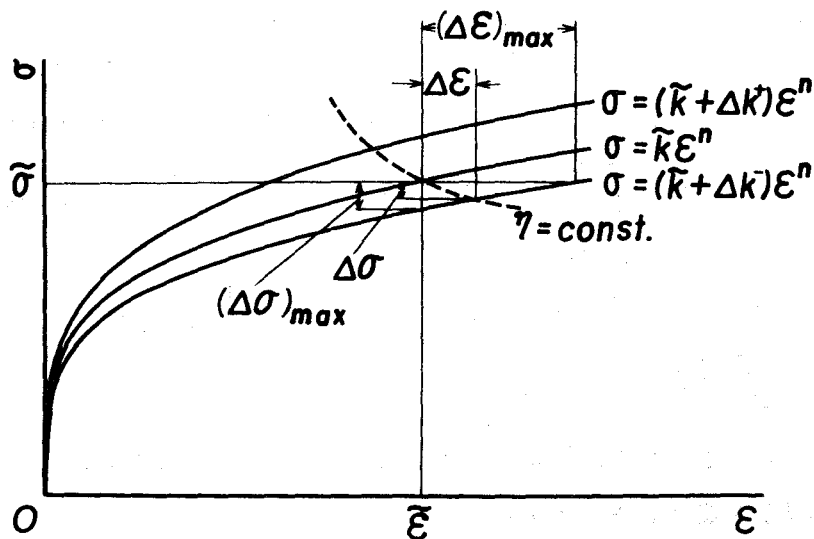


図 3・9 指数硬化型材料の場合の変形挙動 (図式的)

### 3・3・2 粒界においてひずみの拘束がない場合の多結晶体の変形

まず、図3・9に示すように、二つの結晶粒がそれぞれ  $k^+$ ,  $k^-$  なる  $k$  の値を持つとし、これからなる系の変形エネルギー  $W'$  を考える。ここで、 $k^+$ ,  $k^-$  については、

$$\left. \begin{aligned} k^+ &= \bar{k} + \Delta k^+, \quad k^- = \bar{k} + \Delta k^- \\ k^+ - k^- &= \Delta k^+ - \Delta k^- = 2\Delta k_\varepsilon \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3 \cdot 64)$$

とおける。ただし、 $\Delta k^+ > 0$ ,  $\Delta k^- < 0$  であり、 $\bar{k}$  は結晶粒が2個の場合の平均値を示すものとする。

また、図3・9からもわかるように、

$$\left. \begin{aligned} \Delta k^+ &= \Delta k_\varepsilon + (\bar{k}_\varepsilon - \bar{k}) \\ \Delta k^- &= -\Delta k_\varepsilon + (\bar{k}_\varepsilon - \bar{k}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3 \cdot 65)$$

であるから、(3・61), (3・62), (3・65)式より、

$$\begin{aligned} \Delta k^+ - \Delta k^- &= 2(\bar{k}_\varepsilon - \bar{k}) \\ &\cong 2\eta(\bar{k}_\varepsilon - \bar{k}_0) = 2\eta \frac{(\overline{\Delta k_\varepsilon})^2}{\bar{k}_\varepsilon} \dots\dots\dots(3 \cdot 66) \end{aligned}$$

を得る。

したがって、二つの結晶からなる系の変形エネルギー  $W'$  は、 $\bar{\varepsilon} \gg \Delta \varepsilon$  と仮定すると、

$$\begin{aligned} W' &= \frac{1}{2} \{ W^+ + W^- \} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\bar{\varepsilon} - |\Delta \varepsilon|} (\bar{k} + \Delta k^+) \varepsilon^n d\varepsilon + \int_0^{\bar{\varepsilon} + |\Delta \varepsilon|} (\bar{k} + \Delta k^-) \varepsilon^n d\varepsilon \right\} \\ &\cong \frac{1}{n+1} \bar{k}_0 \bar{\varepsilon}^{n+1} + \frac{(n+1)\eta^2 - 2(n+1)\eta + 2n}{2n(n+1)} \\ &\quad \cdot \frac{(\overline{\Delta k_\varepsilon})^2}{\bar{k}_\varepsilon} \bar{\varepsilon}^{-n+1} \dots\dots\dots(3 \cdot 67) \end{aligned}$$

となる。(なおここで、二次以上の微小項を省略するものとして  $\Delta k$ ,  $\tilde{\epsilon}$  は、それぞれ  $\Delta k_\epsilon$ ,  $\tilde{k}_\epsilon$  で近似した。)

結局、多くの結晶からなる系の変形エネルギー  $W$  は、

$$W \cong \frac{1}{n+1} \tilde{k}_\sigma \tilde{\epsilon}^{n+1} + \frac{(n+1)\eta^2 - 2(n+1)\eta + 2n}{2n(n+1)} \cdot \frac{(\Delta k_\epsilon)^2}{\tilde{k}_\epsilon} \tilde{\epsilon}^{n+1} \dots\dots\dots (3.68)$$

で与えられる。これが求める一般式で、前節の(3.36)式に対応する。

(3.68)式で  $\tilde{k}_\sigma$ ,  $\tilde{k}_\epsilon$ ,  $(\Delta k_\epsilon)^2$ ,  $\tilde{\epsilon}^{n+1}$ ,  $n$  はすべて正であるから、 $W$  が最小になるのは、 $\partial W / \partial \eta = 0$  より

$$\eta = 1 \dots\dots\dots (3.69)$$

となる。すなわち、この場合にも前節と同じく、結晶粒相互の拘束を考えなければ、エネルギー的には応力一定の状態が安定である。なお、このとき  $W$  の最小値は、

$$W \cong \frac{1}{n+1} \tilde{k}_\sigma \tilde{\epsilon}^{n+1} + \frac{n-1}{n(n+1)} \cdot \frac{(\Delta k_\epsilon)^2}{2\tilde{k}_\epsilon} \tilde{\epsilon}^{n+1} \dots\dots\dots (3.70)$$

となる。

### 3.3.3 粒界においてひずみが拘束される場合の多結晶体の変形

前節と同様に、二つの結晶粒 I および J の  $k$  の値をそれぞれ  $k_i$ ,  $k_j$  とし、それらの差を  $2\Delta k_{ij}$  とすると、

$$2\Delta k_{ij} = k_i - k_j \dots\dots\dots (3.71)$$

であり、また、これらの境界で生ずるひずみ差  $2\Delta \epsilon_{ij}$  は、(3.55), (3.71)式から、

$$\begin{aligned} 2\Delta \epsilon_{ij} &= \epsilon_i - \epsilon_j = \Delta \epsilon_i - \Delta \epsilon_j \\ &\cong -\eta \left\{ \frac{\Delta k_i}{n\tilde{k}_\epsilon} - \frac{\Delta k_j}{n\tilde{k}_\epsilon} \right\} \tilde{\epsilon} = -2\eta \frac{\Delta k_{ij}}{n\tilde{k}_\epsilon} \tilde{\epsilon} \dots\dots\dots (3.72) \end{aligned}$$



で与えられる。

さて、粒界では  $\eta = 0$  となるから、粒界でひずみを連続的に変化させるために必要なエネルギーを考える。 $k_i$  と  $k_j$  からなる系が  $\eta = \eta$  から  $\eta = \eta'$  ( $\eta' < \eta$ ) まで変化した場合のエネルギー増加  $\Delta W$  は、(3.67) 式の  $W'$  から次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \Delta W &= W'(\eta') - W'(\eta) \\ &\cong \frac{1}{2} \{ (1-\eta')^2 - (1-\eta)^2 \} \frac{(\Delta k_{ij})^2}{n \tilde{k}_\varepsilon} \tilde{\varepsilon}^{n+1} \\ &\dots\dots\dots (3.73) \end{aligned}$$

粒界部分のひずみ  $\varepsilon$  の変化を直線的であると仮定すると ((3.41) 式)，単位体積当りの粒界のエネルギー  $W_b$  は前節の (3.43) 式と同じ形で与えられる。粒界部分の占める割合  $P$  を先と同じく (3.44) 式で定義する。ここで、 $\Delta \ell$  が  $2\Delta \varepsilon_{ij}$  に比例すると仮定すると (図 3.7 参照)，(3.72) 式を用いて、

$$P = P' \frac{\eta |\Delta k_{ij}| \tilde{\varepsilon}}{n \tilde{k}_\varepsilon \ell} \dots\dots\dots (3.74)$$

とおくことができる。ここに  $P'$  は比例定数である。このとき (3.41)，(3.43)，(3.73)，(3.74) 式より、

$$\begin{aligned} W_b' &= \frac{2}{\eta} P' \frac{\eta |\Delta k_{ij}| \tilde{\varepsilon}}{n \tilde{k}_\varepsilon \ell} \int_0^\eta \Delta W d\eta' \\ &= P' \eta^2 \left( 1 - \frac{2}{3} \eta \right) \frac{|\Delta k_{ij}|^3 \tilde{\varepsilon}^{n+2}}{n^2 \tilde{k}_\varepsilon^2 \ell} \end{aligned}$$

となる。したがって、多結晶全体としての粒界部分のエネルギー  $W_b$  は、

$$W_b = \int W_b' d\Omega$$

$$\cong P' \eta^2 \left(1 - \frac{2}{3} \eta\right) \frac{\overline{|\Delta k_{ij}|^3} \tilde{\epsilon}^{n+2}}{n^2 \tilde{k}_\epsilon^2 \ell} \dots\dots\dots (3.75)$$

となる。

多結晶全体としての変形エネルギー  $W_t$  は (3.68) 式および (3.75) 式から

$$W_t = W + W_b$$

$$= \frac{1}{n+1} \tilde{k}_\sigma \tilde{\epsilon}^{n+1} + \frac{(n+1)\eta^2 - 2(n+1)\eta + 2n}{2n(n+1)}$$

$$\cdot \frac{(\Delta k_\epsilon)^2}{\tilde{k}_\epsilon} \tilde{\epsilon}^{n+1} + P' \eta^2 \left(1 - \frac{2}{3} \eta\right) \frac{\overline{|\Delta k_{ij}|^3} \tilde{\epsilon}^{n+2}}{n^2 \tilde{k}_\epsilon^2 \ell}$$

$$\dots\dots\dots (3.76)$$

で与えられる。ここで、 $W_t$  が極値をとるときの  $\eta$  の値を求めると、

$$\frac{\partial W_t}{\partial \eta} = (1-\eta) \left\{ 2P' \frac{\overline{|\Delta k_{ij}|^3} \tilde{\epsilon}^{n+2}}{n^2 \tilde{k}_\epsilon^2 \ell} \eta - \frac{(\Delta k_\epsilon)^2 \tilde{\epsilon}^{n+1}}{n \tilde{k}_\epsilon} \right\} = 0$$

これから、 $0 \leq \eta \leq 1$  の区間において  $W_t$  が最小値をとる  $\eta$  の値は、

$$\eta = \min \left( 1, \frac{(\Delta k_\epsilon)^2 n \tilde{k}_\epsilon \ell}{2P' \overline{|\Delta k_{ij}|^3} \tilde{\epsilon}} \right) \dots\dots\dots (3.77)$$

で与えられる。(3.77) 式は前節の (3.51) 式に対応するもので、これから結晶粒の大きさ  $\ell$  が小さくなるほど、またひずみ  $\tilde{\epsilon}$  が大きくなるほど、 $\eta = 0$ 、すなわちひずみ一定の条件に近づくことがわかる。

### 3・3・4 ま と め

以上の考察においては，上下の結晶粒（図 3・1 の C）の影響については考えていない。これらの影響は二次的なものであると予想されるが，傾向としては粒相互の拘束を増す方向に働くと考えられる。

結晶粒の形状が多結晶金属の変形挙動に及ぼす影響などについては今後さらに検討する必要があると考えられる。

## 3・4 多結晶金属の変形と X 線測定ひずみ

### 3・4・1 ま え が き

3・2 節および 3・3 節においては異方性を持つ結晶からなる多結晶の変形挙動についてのべたが，一方このような多結晶の変形の問題が実験的にどのように現われるかを検討することも必要である。ここでは基礎的な問題として，X 線回折線の peak shift の回折面依存性と結晶塑性の問題の関連について考えてみる。

このような問題に対する最初の試みとしては，1949 年に発表された Greenough の理論<sup>(6)</sup>があり，またその後の発展もこの Greenough の研究を基礎としている。Greenough は，一軸塑性変形の後には多結晶の結晶粒相互間に生ずる残留応力と X 線的に測定される格子ひずみの関係について，Taylor の理論<sup>(7)</sup>を用いた解析とその実験的な検討を行なった。すなわち，Greenough は，(1)多結晶中の各結晶粒が弾性等方体である，(2)多結晶を変形させたときの全ひずみ（弾性ひずみと塑性ひずみの和）が各結晶について一定である，と仮定した上で，塑性変形を受け除荷された後の結晶粒相互の軸方向の微視的残留応力（第 2 種残留応力）と，X 線的に測定しうる試験片軸と直角な方向のひずみとの関係を導いた。

Greenough の理論に対しては，その後主として実験的な面からその適応性の検討<sup>(8)</sup>あるいは批判<sup>(5)</sup>がなされており，なお未解決の問題を含んでいるようであるが，<sup>(9)</sup> <sup>(10)</sup>，一方さきに第 1 章で述べた実験結果からも，銅のよ

うな材料では Greenough の理論の基礎となっている Taylorの理論が必ずしも妥当でないことが示され、また前節でのべたようにひずみ一定の仮定にも問題があり、また弾性等方体の仮定も普遍的なものではない。したがって、理論的な面からいまだ一度このような問題を検討し直すことが必要であると思われる。

以上の点を考え合わせ、本節では、結晶塑性の問題をX線的に扱う際の基礎となる関係式を弾性異方性および塑性異方性を考慮した上で導くことを試みる。なお以下では一軸引張りの場合を考えることにする。

#### 3・4・2 応力とひずみ

まず、基本となる応力とひずみの関係式を考える。いま全ひずみを  $\epsilon$  とすると、

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p \quad \dots\dots\dots(3 \cdot 78)$$

となる。ここに、 $\epsilon_e$ 、 $\epsilon_p$  はそれぞれ弾性ひずみ、塑性ひずみである。引張り軸方向の応力を  $\sigma$  とすると、弾性ひずみに対しては、

$$\sigma = E \epsilon_e \quad \dots\dots\dots(3 \cdot 79)$$

の関係がある。ここに  $E$  は Young 率である。塑性ひずみに対しては、ここでは一般的な形として、全ひずみに対して (3・3) 式と同じく、

$$\sigma = F(\epsilon) \quad \dots\dots\dots(3 \cdot 80)$$

と表わす。

#### 3・4・3 X 線測定ひずみ

次にX線によって測定されるひずみと結晶塑性の問題との関係を考える。結晶の変形とX線回折像の peak shift の関係を論ずる際に注意しなければならないのは次の諸点である。

(1) 一軸変形の場合を考えると、変形の起こるのは軸方向であるが、X線的に測定しうるのは軸方向ではなく、軸と直角方向あるいは一般に軸と傾い

た方向である。以下においては、軸と直角方向（ $y$ 方向）のひずみ  $\epsilon_{ey}$  のみを考えるものとする。この場合、 $X$ 線回折面は試料表面と平行に位置することになる。

(2)  $X$ 線的に検知できるのは弾性ひずみのみである。すなわち、さきの関係式(3.78)について言えば、 $X$ 線的に得られる情報は  $\epsilon_0$  に関するもののみである。

(3) 軸と直角方向（ $y$ 方向）の弾性ひずみ  $\epsilon_{ey}$  を生ずる原因は軸方向（ $x$ 方向）の応力  $\sigma$  である。

(4) 結晶塑性の問題を考える際には、これら  $X$ 線的に得られた弾性ひずみ  $\epsilon_{ey}$  についての知識から、塑性異方性について推察する必要があるが、その際、弾性異方性の影響をも考慮する必要がある。

以上の諸点に留意しながら、次に  $\epsilon_{ey}$  を与える関係式を導く。

#### 3.4.3.1 負荷状態

負荷状態である結晶に生ずる軸方向の応力を  $\sigma_L$  とすると、

$$\sigma_L = \bar{\sigma}_L + \Delta\sigma_L \quad \dots\dots\dots(3.81)$$

負荷時の結晶の拘束率を  $\eta_L$  とすると、(3.56)式から、

$$\left. \begin{array}{l} \Delta\sigma_L = \Delta F(\tilde{\epsilon})(1 - \eta_L) \\ \text{ここに、} \quad \Delta F(\tilde{\epsilon}) = F(\tilde{\epsilon}) - \bar{F}(\tilde{\epsilon}) \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots(3.82)$$

$\bar{F}$  は全ての方位の結晶に対する  $F$  の平均値である。

さて、軸と直角方向の弾性ひずみ  $\epsilon_{ey}$  は、任意の結晶粒について、

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_{eyL} = \tilde{\epsilon}_{eyL} + \Delta\epsilon_{eyL} \\ \epsilon_{eyL} = s_{12}' \sigma_L \\ \Delta\epsilon_{eyL} = s_{12}' \Delta\sigma_L \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots(3.83)$$

となる。ここで、 $s_{ij}'$  は試験片軸を座標軸にとったときの弾性コンプライ

アンス定数である。このように、負荷状態においては、拘束率  $\eta_L$  を与えると、結晶の方位による  $\Delta F$  の値が知られておれば  $\Delta\sigma_L$  がわかる。 $\Delta\sigma_L$  が求まると  $s'_{12}$  を用いて  $\Delta\epsilon_{eyL}$  を求めることができる。

以上はある一つの結晶についてのみ考えてきたが、次に回折に参与している  $m$  個からなる結晶群を考え、これらについての平均を考える必要がある。回折に参与する結晶はある特定の方位関係を持ったもののみであるが、(いまの場合回折面が試料表面に平行) ここでこれらの結晶についての平均を記号  $\overline{\quad}$  で表わすことにする。(3.82) 式より、

$$\overline{\Delta\sigma_L} = \frac{1}{m} \sum \Delta\sigma_L = \frac{1}{m} \sum \Delta F(\epsilon) (1 - \eta_L)$$

ここで、拘束率  $\eta_L$  が  $\Delta F$  によらず一定であるとする、

$$\overline{\Delta\sigma_L} = \overline{\Delta F(\epsilon)} (1 - \eta_L) \quad \dots\dots\dots (3.84)$$

同様に、X 線の的に測定されるひずみは (3.83) 式に対応して、

$$\overline{\Delta\epsilon_{eyL}} = \frac{1}{m} \sum \Delta\epsilon_{eyL} = \frac{1}{m} \sum s'_{12} \Delta\sigma_L \quad \dots\dots (3.85)$$

と与えられる。X 線実験を行なうたびごとに (3.85) 式の右辺を求めるのは繁雑であるので、これを次の形で近似する (この近似の妥当性については、付録 3.6.1 でのべる)。

$$\begin{aligned} \overline{\Delta\epsilon_{eyL}} &\cong \left( \frac{1}{m} \sum s'_{12} \right) \left( \frac{1}{m} \sum \Delta\sigma_L \right) \\ &= \overline{s'_{12}} \cdot \overline{\Delta\sigma_L} = \overline{s'_{12}} \cdot \overline{\Delta F(\epsilon)} (1 - \eta_L) \\ &\dots\dots\dots (3.86) \end{aligned}$$

この式の  $\overline{s'_{12}}$  の値をおのおの回折条件(回折面)についてさきに求めておけば、実際の場合には計算は  $\overline{\Delta F(\epsilon)}$  についてのみ行なえばよいことになる

(次の3・4・4節において  $\overline{s_{12}'}$  の計算についてのべる)。 (3・86) 式からわかるように、もし  $\Delta F(\tilde{\epsilon})$  の値が単結晶による実験などから推量できる場合には、塑性変形時の拘束率  $\eta_L$  を X 線的に求めうる可能性がある。

なお、弾性範囲内の負荷では、(3・86) 式に対応して、

$$\begin{aligned}\overline{\Delta \epsilon_{oyL}} &\cong \overline{s_{12}'} \cdot \overline{\Delta E} \cdot \tilde{\epsilon} \cdot (1 - \eta_L) \\ &\cong - \frac{\overline{s_{12}'} \cdot \overline{\Delta s_{11}'}}{(\overline{s_{11}'})^2} \tilde{\epsilon} (1 - \eta_L) \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 87)\end{aligned}$$

となる (付録 3・6・2 参照)。

### 3・4・3・2 除 荷 状 態

塑性的には異方性をもつ材料であっても、弾性等方体であれば除荷状態での応力差  $\Delta \sigma_{LU}$  と負荷状態での  $\Delta \sigma_L$  は等しくなるが、弾性非等方体では除荷時に弾性異方性に起因する応力差  $\Delta \sigma_U$  を生ずる (ここで、添字 U は除荷時の変化を、添字 LU は除荷後の値を示すものとする)。すなわち、

$$\Delta \sigma_{LU} = \Delta \sigma_L - \Delta \sigma_U \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 88)$$

となる。

そこでまず除荷時を考えると、初期条件 (負荷状態) において応力、ひずみが一定でないので複雑であるが、いま  $\Delta F \ll \tilde{F}$  すなわち  $\Delta \sigma_L \ll \tilde{\sigma}$  とすると、この場合には近似的に初期条件として応力がどの結晶粒においても一定 ( $\tilde{\sigma}$ ) であると考えてさしつかえない。ここで、除荷時の拘束率を  $\eta_U$  とすると、(3・87) 式と同様に、

$$\begin{aligned}\overline{\Delta \sigma_U} &\cong \overline{\Delta E} \cdot \tilde{\epsilon} (1 - \eta_U) \\ &\cong - \frac{\overline{\Delta s_{11}'}}{(\overline{s_{11}'})^2} \tilde{\epsilon} (1 - \eta_U) \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 89)\end{aligned}$$

となる。

したがって、除荷状態では(3・84)，(3・88)，(3・89)式より，前項と同様な取り扱いによって，

$$\begin{aligned}\overline{\Delta \varepsilon_{eyLU}} &\approx \overline{s_{12}'} \cdot \overline{\Delta \sigma_{LU}} = \overline{s_{12}'} (\overline{\Delta \sigma_L} - \overline{\Delta \sigma_U}) \\ &= \overline{s_{12}'} \left\{ \overline{\Delta F(\tilde{\varepsilon})} \cdot (1 - \eta_L) + \frac{\overline{\Delta s_{11}'}}{(\tilde{s_{11}'})^2} \cdot \tilde{\varepsilon} \cdot (1 - \eta_U) \right\} \\ &\dots\dots\dots(3 \cdot 90)\end{aligned}$$

となる。この式から，もし  $\overline{\Delta F}$ ， $\eta_L$  などがわかっている場合には，実験により  $\eta_U$  を求めうる可能性があることがわかる。

もし， $\eta_L = \eta_U \equiv \eta$  であれば(3・90)式は，

$$\begin{aligned}\overline{\Delta \varepsilon_{eyL}} &= \overline{s_{12}'} \cdot (1 - \eta) \left\{ \overline{\Delta F(\tilde{\varepsilon})} + \frac{\overline{\Delta s_{11}'}}{(\tilde{s_{11}'})^2} \tilde{\varepsilon} \right\} \\ &\dots\dots\dots(3 \cdot 91)\end{aligned}$$

となる。

(3・90)式からわかるように，弾性異方性としてはX線測定において  $s_{12}'$  が大きく響くことが予想される。

### 3・4・3・3 ま と め

以上の(3・86)および(3・90)式が求める関係式であり，後者はいわゆる残留格子ひずみを与える式である。この両式を比べると，塑性異方性についての情報を得るためには，むしろ負荷状態で測定したほうが直接的であることがわかる。また，負荷時と除荷時の双方でX線測定を行なうことにより，より多くの情報を得られることが期待される。

なお，(3・90)式において  $\eta_L = 0$ ， $\overline{s_{12}'} = \tilde{s_{12}'}$ ， $\overline{\Delta s_{11}'} = 0$  とすると，

$$\overline{\Delta \varepsilon_{eyLU}} = \overline{s_{12}'} \cdot \overline{\Delta \sigma_L} \dots\dots\dots(3 \cdot 92)$$

となり，これは Greenough の導いた式<sup>(6)</sup>と一致する。



### 3・4・4 弾性異方性の検討

前節の結果，回折する結晶についての  $\Delta s_{11}'$  および  $\Delta s_{12}'$  の平均値  $\overline{\Delta s_{11}'}$ ， $\overline{\Delta s_{12}'}$  を求める必要が生じたが，次にこれについてのべる。（なお以下において弾性異方性の問題を取り扱うのに，すべて弾性コンプライアンス定数  $s_{ij}$  を用いる。これは計算の仮定として，応力一定条件的な考え方を用いることを意味している（付録 3・6・2 参照）。）

#### 3・4・4・1 非等方体弾性論の一般式

弾性非等方体における応力の六つの成分（ここでは  $X_x$ ，などと記す）とひずみの六つの成分（ここでは  $e_{xx}$ ，などと記す）の関係は一般に<sup>(11)</sup>，

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= s_{11} X_x + s_{12} Y_y + s_{13} Z_z + s_{14} Y_z + s_{15} Z_x + s_{16} X_y \\ e_{yy} &= s_{21} X_x + s_{22} Y_y + s_{23} Z_z + s_{24} Y_z + s_{25} Z_x + s_{26} X_y \\ &\dots\dots\dots \\ e_{yz} &= s_{41} X_x + s_{42} Y_y + s_{43} Z_z + s_{44} Y_z + s_{45} Z_x + s_{46} X_y \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3 \cdot 93)$$

のような 6 個の式で表わされる。立方晶では，座標軸を結晶軸と一致させると，対称性から，

$$\| s_{ij} \| = \left\| \begin{array}{cccccc} s_{11} & s_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{12} & s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} \end{array} \right\| \dots\dots\dots (3 \cdot 94)$$

となる<sup>(11)</sup>。一方弾性論<sup>(12)</sup>によれば，一般に方位 (a, b, c,) を持つ面

$X'$ に働く応力  $X'_{X'}$ のみが作用しているとするとき、

$$\left. \begin{aligned} X_X &= a^2 X'_{X'}, Y_Y = b^2 X'_{X'}, Z_Z = c^2 X'_{X'} \\ Y_Z &= bc X'_{X'}, Z_X = ca X'_{X'}, X_Y = ab X'_{X'} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3 \cdot 95)$$

の関係がある。また、 $X'$  方向のひずみ  $e_{X'X'}$  は、

$$\begin{aligned} e_{X'X'} &= a^2 e_{XX} + b^2 e_{YY} + c^2 e_{ZZ} \\ &\quad + bc e_{YZ} + ca e_{ZX} + ab e_{XY} \end{aligned} \dots\dots\dots (3 \cdot 96)$$

$X'$ に直角な方向 ( $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ) のひずみ  $e_{Y'Y'}$  は、

$$\begin{aligned} e_{Y'Y'} &= a'^2 e_{XX} + b'^2 e_{YY} + c'^2 e_{ZZ} \\ &\quad + b'c' e_{YZ} + c'a' e_{ZX} + a'b' e_{XY} \end{aligned} \dots\dots\dots (3 \cdot 97)$$

と表わすことができる。ここで、

$$e_{X'X'} = s_{11}' X'_{X'} \dots\dots\dots (3 \cdot 98)$$

$$e_{Y'Y'} = s_{12}' X'_{X'} \dots\dots\dots (3 \cdot 99)$$

とおく。

(3・93), (3・94), (3・95), (3・96), (3・98) 式より、

$$s_{11}' = s_{11} + (-2s_{11} + 2s_{12} + s_{44}) (a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2) \dots\dots\dots (3 \cdot 100)$$

同様に、(3・93), (3・94), (3・95), (3・97), (3・99) 式より、

$$\begin{aligned} s_{12}' &= (s_{11} - \frac{1}{2} s_{44}) (a^2 a'^2 + b^2 b'^2 + c^2 c'^2) \\ &\quad + s_{12} \{ (b^2 + c^2) a'^2 + (c^2 + a^2) b'^2 + (a^2 + b^2) c'^2 \} \end{aligned} \dots\dots\dots (3 \cdot 101)$$

となって求める結果が得られる。ただし、ここで定義より、

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 102)$$

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1 \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 103)$$

$$aa' + bb' + cc' = 0 \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 104)$$

の関係がある。

$$3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 \quad \overline{\Delta s'_{11}} \text{ および } \overline{s'_{12}}$$

さて、試料軸と直角をなすある特定の回折面 ( $h k l$ ) を選ぶとすると (たとえば  $\text{Cok}\alpha$  線で銅をとった場合の  $(400)$  面のごとく),  $(a', b', c')$  が定まる。(  $(h k l)$  と  $(a', b', c')$  は比例関係にある。) このとき  $(a, b, c)$  は  $(3 \cdot 102)$ ,  $(3 \cdot 104)$  式を満たしながら変化する。  $a, b, c$  を三つの直交座標軸と考えたとき,  $(3 \cdot 102)$  式は原点を中心とする球を,  $(3 \cdot 104)$  式は原点を通る平面を表わす。したがって, その交線は円となる。結晶の方位分布が一樣であると仮定すると, 回折に参与する結晶が試験片の軸方向としてとりうる方位は, この円周上に一樣に分布することになる。

$s'_{11}$  を与える式  $(3 \cdot 100)$  に  $(3 \cdot 102)(3 \cdot 104)$  式を代入して, たとえば  $a, b$  を消去すると  $s'_{11}$  は  $c$  のみを変数とする式に書ける。そこで上のような幾何学的条件を考慮し,  $c$  の変化範囲を考え, 一種の重みつき平均をとることによって  $\overline{s'_{11}}$  を求めることができる (具体的な計算の一例を付録 3・6・3 に示す)。また,  $\overline{\Delta s'_{11}}$  は  $\overline{\Delta s'_{11}} = \overline{s'_{11}} - \widetilde{s'_{11}}$  より求めることができる。得られた結果を表 3・1 に示す。

同様にして  $\overline{s'_{12}}$  も計算でき, 表 3・2 のようになる。また実際の材料の例として fcc 金属の Al および Cu についての  $s_{ij}$  の値<sup>(11)</sup> を代入すると,  $\overline{\Delta s'_{11}}, \overline{s'_{12}}$  はそれぞれ表 3・3, 表 3・4 に示すようになる。

表 3・1 各回折面に対する  $\overline{s_{11}}$  の値

回折面	$\overline{s_{11}}$
(222)	$s_{11} + 0.250(-2s_{11} + 2s_{12} + s_{44})$
(331)	$" + 0.228( \quad " \quad )$
(422)	$" + 0.219( \quad " \quad )$
(420)	$" + 0.185( \quad " \quad )$
(311)	$" + 0.184( \quad " \quad )$
(511)	$" + 0.152( \quad " \quad )$
(400)	$" + 0.125( \quad " \quad )$

表 3・2 各回折面に対する  $\overline{s_{12}}$  の値

回折面	$\overline{s_{12}}$
(222)	$0.333(s_{11} - \frac{1}{2}s_{44}) + 0.667s_{12}$
(331)	$0.274( \quad " \quad ) + 0.726"$
(422)	$0.250( \quad " \quad ) + 0.750"$
(420)	$0.160( \quad " \quad ) + 0.840"$
(311)	$0.157( \quad " \quad ) + 0.843"$
(511)	$0.070( \quad " \quad ) + 0.930"$
(400)	$0( \quad " \quad ) + 1"$

表 3・3 Al と Cu に対する  $\overline{\Delta s_{11}'}$  の値

回折面	$\overline{s_{11}'}$		$\overline{\Delta s_{11}'}$	
	Al	Cu	Al	Cu
(222)	1.37	0.75	-0.02	-0.05
(331)	1.39	0.81	0	0.01
(422)	1.39	0.84	0	0.04
(420)	1.42	0.94	0.03	0.14
(311)	1.42	0.94	0.03	0.14
(511)	1.44	1.03	0.05	0.23
(400)	1.46	1.11	0.07	0.31
$\widetilde{s_{11}'}$	1.39	0.80		

( $\times 10^{-4} \text{mm}^2/\text{kg}$ )

#### 3・4・4・3 まとめ

以上の計算から得られた  $\overline{\Delta s_{11}'}$ ,  $\overline{s_{12}'}$  を用いれば, (3・86) 式あるいは (3・90) 式から試験片軸と直角方向のひずみをそれぞれ弾性異方性を考慮した上で求めることができる。表 3・3, 表 3・4 に示される  $\overline{\Delta s_{11}'}$ ,  $\overline{s_{12}'}$  は, 特に Cu の場合には回折面によってかなり差異を示し, 一般に異方性の強い材料ではこのような問

表 3・4 Al と Cu に対する  $\overline{s_{12}'}$  の値

回折面	$\overline{s_{12}'}$	
	Al	Cu
(222)	-0.44	-0.15
(331)	-0.47	-0.23
(422)	-0.48	-0.26
(420)	-0.51	-0.39
(311)	-0.51	-0.39
(511)	-0.54	-0.52
(400)	-0.57	-0.62

( $\times 10^{-4} \text{mm}^2/\text{kg}$ )

題を扱う際に弾性異方性の影響を考慮する必要があることを示している（なお、表 3・1, 3・2 に示した回折面は fcc 金属に対応するものである）。

### 3・5 結 言

以上の結果をまとめると次のようになる。

(1) 異方性結晶からなる多結晶の変形挙動を示すパラメーターとして、結晶粒相互の拘束率  $\eta$  を定義し、応力、ひずみについての基本的な関係式を求めるとともに、これらを用いて応力-ひずみ関係が、(a)直線的、(b)指数関数的、である場合の多結晶体の一軸変形について、その変形挙動の基礎的な考察を行なった。

(2) その結果、粒界における粒相互の拘束がない場合には、いずれの応力-ひずみ関係のときにも、応力一定の条件がエネルギー的に安定であることが判明した。また粒界の拘束の影響についても基本的な関係式を導き、多結晶の変形では粒界のひずみ領域が増すほど、いいかえるとひずみが大きくなり、結晶粒径が小さくなるほど、応力一定の条件からひずみ一定の条件に近づく傾向があることを示した。これらは従来報告されている実験結果の傾向と一致する。

(3) 弾性および塑性異方性材における変形と X 線的に測定されるひずみの基礎的な関係式を導いた。X 線回折線の peak shift から結晶塑性の知識を得るためには、残留格子ひずみ（除荷状態）の場合に測定を行なうだけでなく、負荷時についても測定を行なえば、より直接的な情報を得ることができる。塑性異方性  $\Delta F(\epsilon)$  が単結晶についての実験などによって知られている場合には、結晶粒相互の拘束の状態を示す拘束率  $\eta$  を X 線的に決定しうる可能性がある。

### 3.6 付 録

#### 3.6.1 付 録 I

一般に、二つの量  $A$ ,  $B$  があって、

$$A = \bar{A} + \Delta A, \quad B = \bar{B} + \Delta B$$

とする（ここに、 $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  はそれぞれ  $A$ ,  $B$  の平均を示すものとする）。

$$\begin{aligned} AB &= (\bar{A} + \Delta A)(\bar{B} + \Delta B) \\ &= \bar{A}\bar{B} + \bar{A}\Delta B + \bar{B}\Delta A + \Delta A \cdot \Delta B \end{aligned}$$

よって、 $(AB)$  の平均  $\overline{AB}$  は、

$$\overline{AB} = \bar{A}\bar{B} + \overline{\Delta A \Delta B}$$

となる（なぜなら、 $\overline{\Delta A} = \overline{\Delta B} = 0$ ）。したがって、 $\bar{A} \gg \Delta A$ ,  $\bar{B} \gg \Delta B$  であれば、

$$\overline{AB} \cong \bar{A} \cdot \bar{B}$$

と近似することができる。

#### 3.6.2 付 録 II

軸方向の弾性コンプライアンスを  $s'_{11}$  とすると、

$$E = 1/s'_{11}$$

の関係があるから、 $E = \tilde{E} + \Delta E$ ,  $s'_{11} = \tilde{s}'_{11} + \Delta s'_{11}$  より、 $\tilde{s}'_{11} \gg \Delta s'_{11}$  のときは、

$$\tilde{E} + \Delta E = \frac{1}{\tilde{s}'_{11} + \Delta s'_{11}} \cong \frac{1}{\tilde{s}'_{11}} \left( 1 - \frac{\Delta s'_{11}}{\tilde{s}'_{11}} \right)$$

また(3.26)式より

$$\tilde{E} - \frac{1}{\tilde{s}'_{11}} \cong \frac{(\Delta E)^2}{\tilde{E}}$$

が成り立つから、 $\tilde{E} \gg \Delta E$  ならば、

$$\Delta E + \frac{(\Delta E)^2}{\tilde{E}} \cong \Delta E \cong - \frac{\Delta s'_{11}}{(\tilde{s}'_{11})^2}$$

### 3・6・3 付 録 Ⅲ

具体的な計算の一例として、ここでは(331)面についての  $\overline{s_{11}}$  を求めてみる。このとき、(3・104)式は、

$$3a + 3b + c = 0 \quad \dots\dots\dots (3・105)$$

となる。この関係を用いると、(3・100)式に対応して、

$$\begin{aligned} \phi &\equiv a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 \\ &= -\frac{56}{81} c^4 + \frac{4}{9} c^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。一方、(3・102)、(3・105)式から  $c$  の最小値は0、最大値は  $c_1 = \sqrt{18/19}$  であることが示される。

さて、一般に関数  $f(x)$  の重み  $g(x)$  つき平均は、

$$\{f(x)\}_{\text{mean}} = \int_0^{x_1} f(x) g(x) dx \bigg/ \int_0^{x_1} g(x) dx$$

で与えられるから、さきにのべたように、(3・102)と(3・104)式で示される球と平面との交線の作る円上で方位の分布が一樣であるとして、 $c^2$   $c^4$  の平均値を求めるが、これらはこの円の  $c$  軸への投影であることを考慮して重みつき平均を求めると(すなわち、 $c$  軸上では分布は一樣ではないから)、

$$(c^2)_{\text{mean}} = \frac{1}{2} c_1^2$$

$$(c^4)_{\text{mean}} = \frac{3}{8} c_1^4$$

となる。したがって、

$$\phi_{\text{mean}} = 0.228$$

と求まる。



## 文 献

- (1) W. Voigt, "Lehrbuch der Kristallphysik" (1928).  
B. B. Teubner, Leipzig.
- (2) A. Reuss, Z. angew. Math. Mech., 9 (1929), 49.
- (3) 大久保, 清家, 機械学会論文集, 28 - 194 (昭37), 1293.
- (4) R. J. Price, Phil. Mag., 12 (1965), 561.
- (5) E. Macherauch, Materialprüf., 5 (1963), 14.
- (6) G. B. Greenough, Proc. Roy. Soc. London, A197 (1949),  
556.
- (7) G. I. Taylor, J. Inst. Met., 62 (1938), 307.
- (8) C. M. Bateman, Acta Met., 2 (1954), 451.
- (9) 辛島, 藤原, 小島, 機械学会論文集, 23 - 135 (昭32), 870.
- (10) 田丸, 小島, 材料, 14 (昭40), 987.
- (11) C. Kittel, "Introduction to Solid State Physics",  
(1953), John Wiley & Sons.
- (12) A. H. Love, "Mathematical Theory of Elasticity"  
(4th ed.), (1927), Cambridge.

## 第Ⅱ部 疲れにおける平均応力および残留応力

第Ⅰ部においてのべた疲れは、いずれも両振りの繰返し応力が負荷された場合であったが、第Ⅱ部においては、主として繰返し応力に重ね合わされた静的な応力、すなわち平均応力と残留応力の問題について検討を加える。実験的な面から言えば、第Ⅰ部では主としてX線回折線半価幅の変化についてのべたのに対して、第Ⅱ部においては主としてX線回折線の peak shift から求められる残留応力の問題を中心に取扱う。

疲れ破壊が巨視的な外観上の変化がほとんどなくして破壊することはよく知られているが、耐久限や疲れ寿命についてだけでなく、疲れ過程における材料の種々の組織的变化、あるいは crack の成長などについての研究がなされるようになったのは比較的最近のことである。平均応力の問題についても同時にそれが疲れ過程に及ぼす種々の影響について調べる必要があると考えられる。X線回折法を用いると非破壊的に材料内の微視的な変化を測定することが可能であり、この目的に適している。

一方、従来から焼きなまし材の疲れにおいて、疲れ過程に残留応力が発生する現象が認められている。これは疲れにおける平均応力の問題とも関連があり、またともに疲れ機構を解明する上での情報としても有効であると考えられる。さらに平均応力と残留応力はその疲れ寿命への影響という点で類似の効果を持つと考えられる。

以下においては、まず第4章において、疲れ過程における平均応力の影響について実験的な検討を加え、次いで第5章において疲れ過程に発生する残留応力の変化をX線に求めるとともに、その変化の機構について考察を加える。さらに第6章においては、疲れにおいて重要な意味を持つ疲れ crack の発生、成長について、平均応力の影響を含めてエネルギー的な観点

から考察する。

## 第4章 疲れ過程における平均応力の影響

### 4.1 緒 言

実際に使用される機械部材や構造物等には、一定の応力振幅のほか、一般には静的な応力が重複して加わる場合が多い。すなわち、金属材料の疲れの研究においては、平均応力の影響が重要な問題となっている。

平均応力下の疲れに関する実験的研究は従来から数多くなされてお、またそれらの実験結果にもとずいていくつかの criteria が提案されている。

1)～6)。その一例と

して、Sines<sup>3)</sup> が行った整理を図4.1に

示す。すなわち、平均応力の影響は繰返し応力と静的応力の各種の組合せによって異なっている。

ところで、従来の研究の多くは、実用上の見地から主として耐久限度線図の決定をそのおもな目的としており、疲れ過程における平均応力の影響、すなわち平均応力の影響がいかなる原因によって生じるかについて調べた研究は数少なく、これは

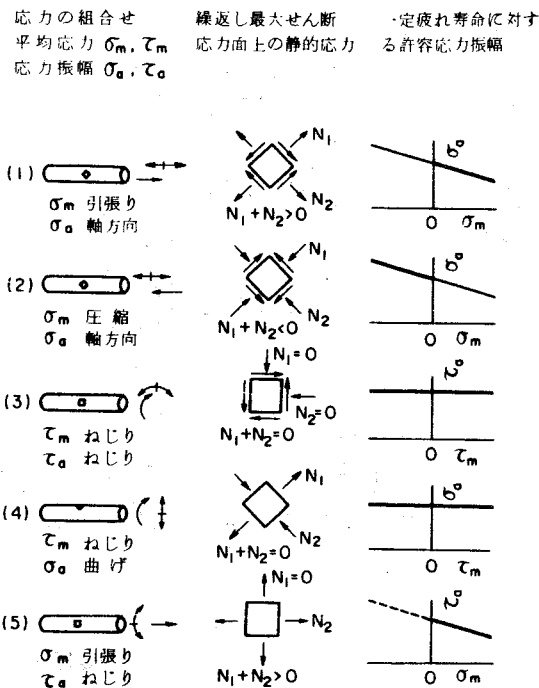


図4.1 各種の繰返し応力と平均応力の組合せの疲れ強さに対する影響 (Sinesによる)

疲れ機構とも関連するため不明な点が多い。

この点を明らかにするためには、まず疲れ過程において平均応力がいかなる影響を及ぼすかを実験的に検討する必要がある。そこで本章においては、曲げ疲れおよびねじり疲れについて、平均応力が負荷された場合の疲れ過程におけるX線回折線半価幅変化、残留応力変化、およびcrack成長の観察などを行なう。

Sinesの整理(図4.1)にも見られるように、平均応力の影響は曲げ(あるいは引張り圧縮)の場合とねじりの場合とでは対称的に異なっている。すなわち、曲げの場合に平均応力の影響は大きい、ねじりではほとんど影響しない。したがって、これらのそれぞれに対して検討を加えるとともに、両者を比較することが平均応力の影響を解明し、疲れ機構を考える上に重要である。

## 4.2 曲げ疲れの場合

### 4.2.1 実験方法

#### 4.2.1.1 試験片

半価幅測定、残留応力の測定、および組織観察に用いた材料は軟鋼で、そ

表4.1 成分分析表(%)

C	Si	Mn	P	S	Ni	Cr	Mo	Cu
0.17	0.42	0.36	0.011	0.010	—	—	0.01	0.17

表4.2 機械的性質

降伏応力	引張強さ	結晶粒度
21.1 kg/mm <sup>2</sup>	40.0 kg/mm <sup>2</sup>	0.037 mm

の成分分析値を表 4・1 に、試験片形状を図 4・2 (a) に示す。試験片は加工後エメリ紙の 0 4 番まで仕上げた後、910°C で 1 時間真空焼きなましを行ない、Jacquet の液（過塩素酸 1：無水酢酸 4）により電解研磨を施して実験に供した。その機械的性質を表 4・2 に示す。

なお、その後行なった有孔材による crack 成長の測定には、平均応力の重複による試験片のたわみ変形を防止する意味で、降伏点の高い S 25 C 材を用いた。その試験片寸法は図 4・2 (b) に示すようなもので、中央に 2.0 mmφ の孔をあけることによって、成長する crack を一本におさえ、かつその成長速度を遅くして観察を容易にした。この円孔による応力集中率は  $\alpha = 2.1$  程度である<sup>(1)</sup>。

#### 4・2・1・2 疲れ試験

使用した疲れ試験機は西原式板曲げ疲れ試験機である。平均応力  $\sigma_m$  を加えた場合、最大応力  $\sigma_{max}$  は応力振巾を  $\sigma_a$  とすると  $\sigma_{max} = \sigma_a + \sigma_m$  で与えられるが、負荷応力は  $\sigma_{max} < \sigma_y$  ( $\sigma_y$  : 降伏応力) の条件にしたがって選んだ。平均応力は試験機の慣性円板にばねを介して直接おもりをつり下げることによって加えた。使用し

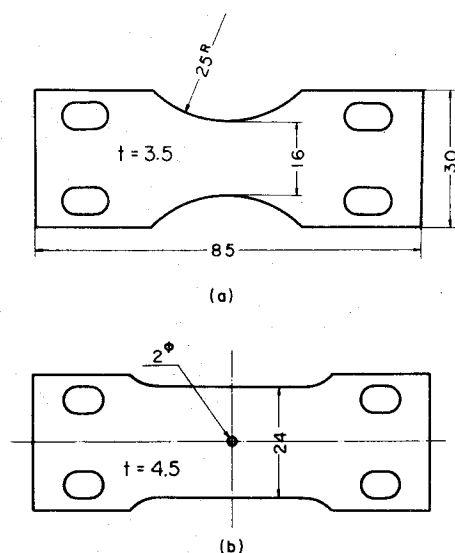


図 4・2 試験片の形状

た材料の  $S-N$  曲線を  
 図 4・3 に示す。図中の  
 黒丸は平均応力  $+4.1 \text{ kg/mm}^2$   
 が加わった場合である。  
 なお、平均応力が加わっ  
 た場合は、試験片は常に  
 引張り平均応力側から破  
 断する。応力繰返し速度  
 は  $2000 \text{ rpm}$  である。

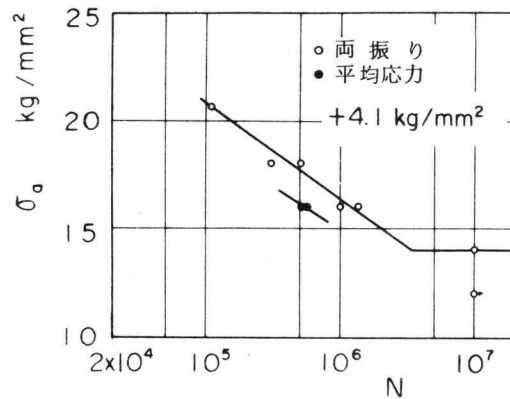


図 4・3  $S-N$  曲線 (板曲げ)

#### 4・2・1・3 半価幅および残留応力の X 線測定

X 線による測定には背面反射カメラによるフィルム法を用いたが、その際  
 半価幅および残留応力を精度よく測定するために必要な、一様に連続した回  
 折線をフィルム上に得るために、図 4・4 に示すような試料上下送り装置を  
 用いて、撮影中試料を X 線入射方向に対して垂直な平面内で上下に揺動させ、  
 試験片断面最少部におい  
 て出来得る限り多くの結  
 晶粒からの回折線の平均  
 値を得るようにした。X  
 線の実験条件を表 4・3  
 に示す。

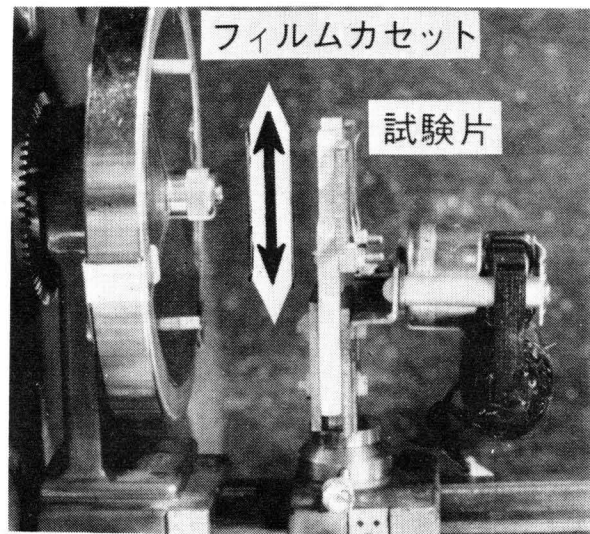


図 4・4 試験片の上下揺動装置

表 4・3 X線実験条件

	半価幅測定	残留応力測定
特 性 X 線	CoK $\alpha$	CrK $\alpha$
試 料 回 折 面	(310)	(211)
管 電 圧	35 kV	
管 電 流	20 mA	
ス リ ッ ト	1mm $\phi$ ダブルピンホール	
フ ィ ル タ	Fe はく	V はく
フ ィ ル ム 試 料 間	70 mm	55 mm
フ ィ ル ム	フジ医療用 (PX)	
露 出 時 間	10 分	8~10 分
ピーク位置決定法		半 価 幅 法
比 較 物 質		Cr 粉

残留応力測定には  $\sin^2 \phi$  法<sup>(7)</sup> を用いた。応力値は  $\Delta - \sin^2 \phi$  線図 (ここに  $\Delta$  は試料回折線 peak と比較物質回折線 peak の距離) の傾斜から,

$$\sigma = -C \frac{\partial \Delta}{\partial \sin^2 \phi} \quad (C: \text{定数})$$

..... (4・1)

によって決定される。使用した  $\Delta - \sin^2 \phi$  線図の一例を図 4・5 に示すが, これから求めた応力測定の精度はほぼ,  $\pm 1 \text{ Kg/mm}^2$  である。

#### 4・2・1・4 組織観察

組織観察はあらかじめ電解研磨によって表面を仕上げた試験片を用い, 表面のすべり線および crack の挙動について光学顕微鏡により調べた。



#### 4・2・2 実験結果

##### 4・2・2・1 半価幅の変化

まず基礎となる両振りの繰返し曲げ応力が負荷された場合の半価幅の変化を本材料について調べた結果を図 4・6 に示す。図のたて軸は各繰返し数における半価幅  $b$  の初期値  $B$  に対する比である。この変化の傾向は従来の結果 (8) と同様である。

次に、繰返し応力  $16.0 \text{ Kg/mm}^2$  に平均応力  $+4.1 \text{ Kg/mm}^2$  および  $-4.1 \text{ Kg/mm}^2$  が加わった場合の半価幅の変化を図 4・7 (a) に、また応力振幅  $14.0 \text{ Kg/mm}^2$ 、平均応力として  $+4.1$  および  $-4.1 \text{ Kg/mm}^2$

が加わった場合を図 4・7 (b) に示す。図中●印は板曲げの引張平均応力側、×印は圧縮平均応力側の半価幅の変化を示す。

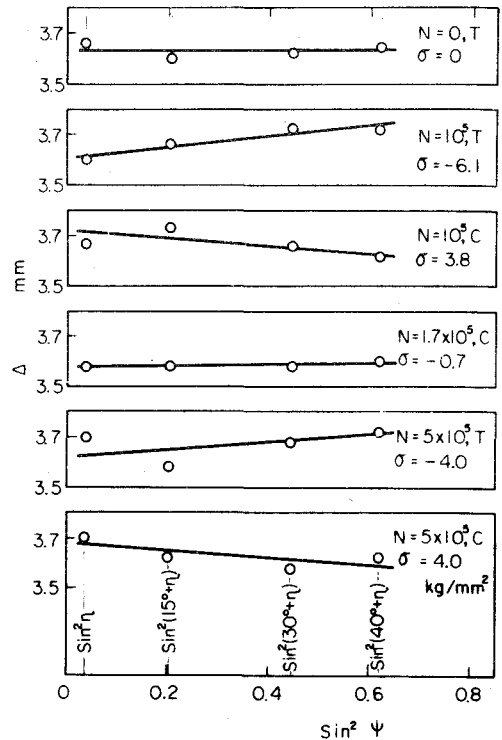


図 4・5  $\Delta - \sin^2 \Psi$  線図の一例 (Tは引張平均応力側, Cは圧縮側)

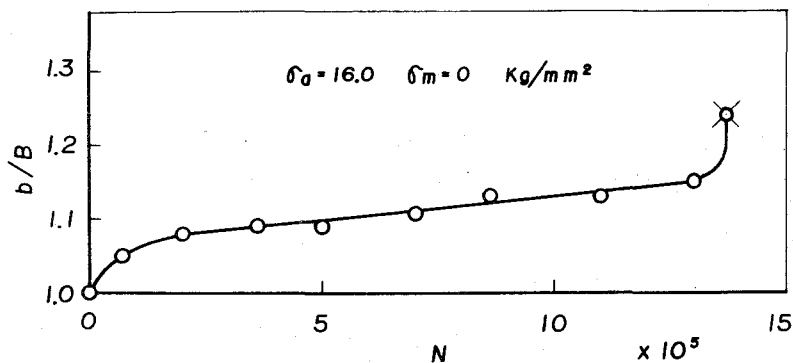


図 4・6 半価幅の変化 (両振り)

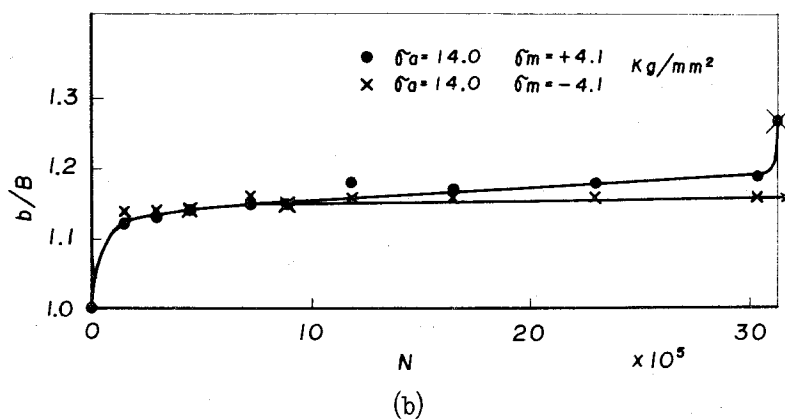
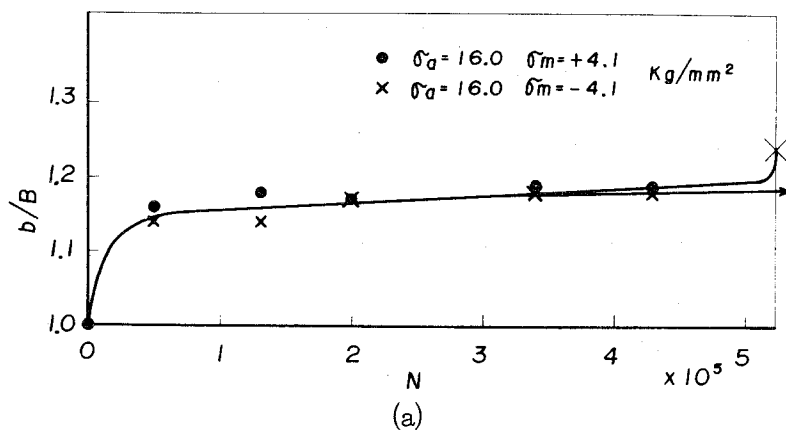


図 4・7 半価幅の変化 (平均応力)

図 4・7 からわかるように、応力繰返しの初期においては平均応力が引張り (●印) であっても、圧縮 (×印) であっても半価幅の変化の傾向は同様であることがわかる。しかしながら、その後 (半価幅変化の第 2 段階) の変化過程においては、わずかながら引張平均応力側の半価幅の変化が大きく、圧縮側はほぼ一定のままである。

なお、試験片は板曲げであり、引張平均応力側から破断するため、図 4・7 において圧縮側の半価幅の変化は疲れ過程の途中までしか示されていない。

#### 4・2・2・2 表面における残留応力変化

応力振幅  $16.0 \text{ kg/mm}^2$  に平均応力として  $+4.1 \text{ kg/mm}^2$  および  $-4.1 \text{ kg/mm}^2$  が加わった場合の試験片軸方向の残留応力変化を求めた結果を図 4・8(a)に示す (図において, ●印は引張平均応力側の残留応力変化を, ×印は圧縮平均応力側の残留応力変化を示している)。

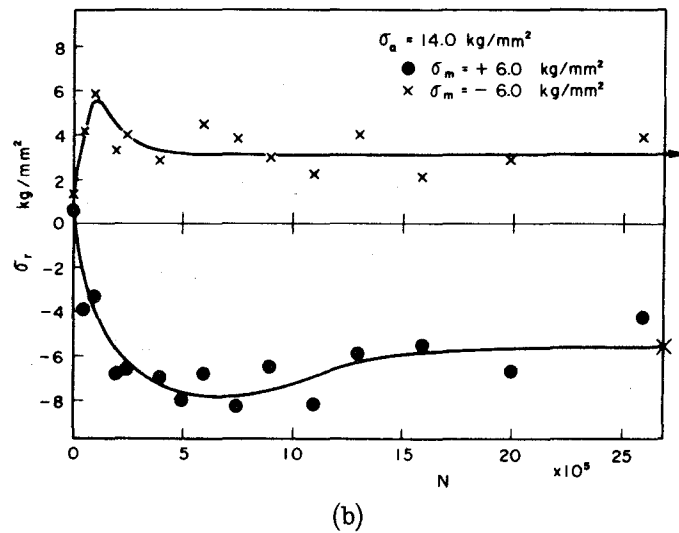
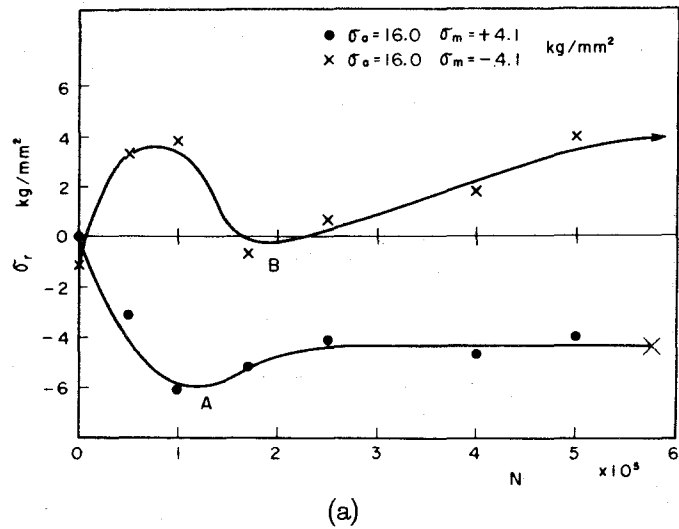


図 4・8 表面における残留応力変化 (平均応力)

図に見られるごとく、疲れの初期  $N = 10^5$  頃までに、引張側 (●印) では圧縮の残留応力を、圧縮側 (×印) では引張りの残留応力を生じる。

すなわち、それぞれの平均応力の影響をバランスする方向の残留応力を生じる。その後の疲れ過程における残留応力の変化は、引張平均応力側 (●印) では圧縮の残留応力がやや減少し、一定の圧縮残留応力のまま破断に至る。一方、圧縮平均応力側 (×印) では初期に  $4 \text{ Kg/mm}^2$  程度生じた引張りの残留応力が一旦減少して 0 に近ずき、その後繰返し数が進むにつれて再び増加する傾向を示す。なお、この場合も半価幅の測定と同様圧縮平均応力側の変化は疲れ過程の途中までしか示されていない。

次に同じく、平均応力をやや増加した場合、すなわち、 $\sigma_a = 14.0 \text{ Kg/mm}^2$ , 平均応力  $\sigma_m = +6.0$  および  $-6.0 \text{ Kg/mm}^2$  の場合の残留応力変化を図 4・8 (b) に示す。引張平均応力側の変化 (●印) は、図 4・8 (a) と同様であるが、圧縮平均応力側の変化 (×印) はやや異った傾向を示している。

#### 4・2・2・3 残留応力分布

上にのべた結果はいずれも表面における残留応力変化であったが、次に試験片内部の残留応力分布について測定を行った。すなわち、平均応力が加わった場合に、初期 (図 4・8 (a)  $N = 10^5$  付近) に生じる残留応力についてその深さ方向の分布を求めたが、その結果を図 4・9 に示す。

図は応力振幅  $\sigma_a = 16.0 \text{ Kg/mm}^2$ , 平均応力  $\sigma_m = +4.1$  および  $-4.1 \text{ Kg/mm}^2$  の場合で、繰返し数  $N = 8 \times 10^4$  で疲れ試験を中止し、表面を電解研磨で除去しながら残留応力を測定したものである。(図の●印は引張平均応力側、×印は圧縮平均応力側の分布を示す。) 引張側 (●印) および圧縮側 (×印) ともに、その分布はほぼ同様の傾向を示して減少する。いずれも  $80 \mu$  程度の深さのところでは残留応力が消失し、それより深いところでは両者の残留応力はともに  $-1 \text{ Kg/mm}^2$  程度となって一致する。

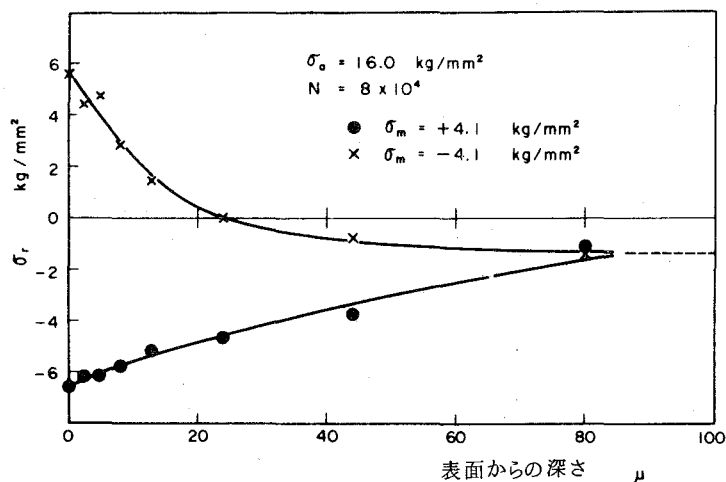


図 4・9 深さ方向の残留応力分布

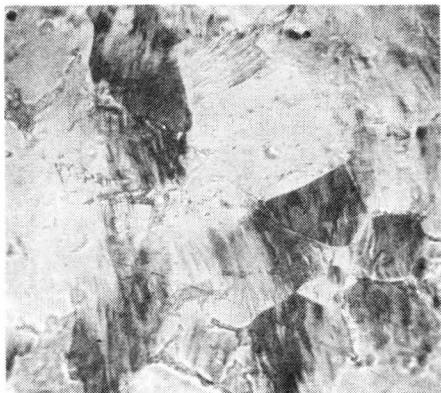
#### 4・2・2・4 表面の組織観察

次にX線回折線半価幅の変化および残留応力の変化の測定結果と対比して組織観察を行なった結果についてのべる。図 4・10 (a) ~ (e) は  $\sigma_a = 16.0 \text{ Kg/mm}^2$ ,  $\sigma_m = +4.1 \text{ Kg/mm}^2$  および  $-4.1 \text{ Kg/mm}^2$  が負荷された場合の組織変化を示す。このとき破断繰返し数は  $N_f = 7.5 \times 10^5$  である。

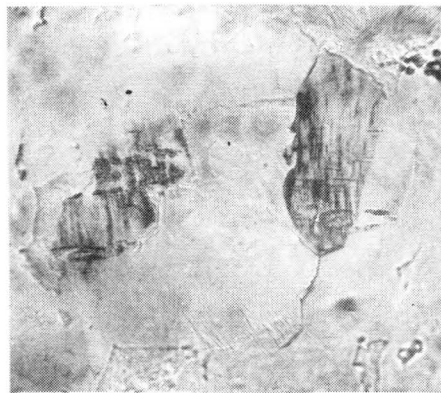
表面には応力の繰返しに伴って特定の結晶粒にすべりを生じ、繰返し数とともにその程度を増す。この初期のすべりは平均応力の引張側においても圧縮側においても認められた。その一例を図 4・10 (a) (引張側) および (b) (圧縮側) に示す。(写真の黒い部分はすべりを生じている結晶である。)

次に、顕微鏡によって crack の初期状態らしきものが疲れ過程のかなり早い時期に現われるのが認められる。その一例を (c) に示す。しかしながらこれが確実に crack であると識別できるようになるのはずっと後になって、寿命の 60 % 程度になってからである。

図 4・10 (d) には、crack の伝播の典型的な様相の一例を示す。(e) は (d) の説明図である。この crack をよく見ると、すべった結晶内では粒内をすべり線と平行に走り、さらに粒界に沿って進んでいることがわかる。



(a)  $N = 1.5 \times 10^5$  ( $\times 300$ )  
(引張平均応力側)



(c)  $N = 7.5 \times 10^4$  ( $\times 300$ )  
(圧縮平均応力側)



(b)  $N = 1.5 \times 10^5$  ( $\times 300$ )  
(圧縮平均応力側)

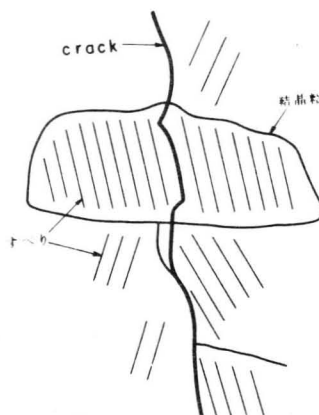


(d)  $N = 4.5 \times 10^5$  ( $\times 300$ )  
(引張平均応力側)

$$\sigma_m = +4.1 \text{ および } -4.1 \text{ Kg/mm}^2$$

$$\sigma_a = 16.0 \text{ Kg/mm}^2, \quad N_f = 7.5 \times 10^5$$

図 4・10 組織変化の例



(e) (d)の説明図

この crack の長さは  $N = 4.5 \times 10^5$  において約  $0.2 \text{ mm}$  である。また、この crack はその後主 crack となって発達するが、 $N = 5 \times 10^5$  でさらに第2の別の crack が認められ、さらに進むにつれて、第3、第4の crack が現われる。このように、平滑材の場合生じる crack の数は一つではないが、その中で最も長い主 crack について、その成長を調べた結果を図4・11に示す。

すなわち、平均応力の引張側の方が顕微鏡的に認められる crack の現われるのが早く、またその成長速度も大きい傾向を示す。

一方、これら数多くの crack の破断前の分布状況を、表面のすべり線を電解研磨で約  $10 \mu$  の深さまで除去した後スケッチしたものが図4・12

である。すなわち、平均

応力の引張側の方が圧縮側に比べて crack の数、長さともに多い。平滑材においては繰返し数とともに数多くの crack が現われ、それらが互に結合し、成長して主 crack となり破断に至る。

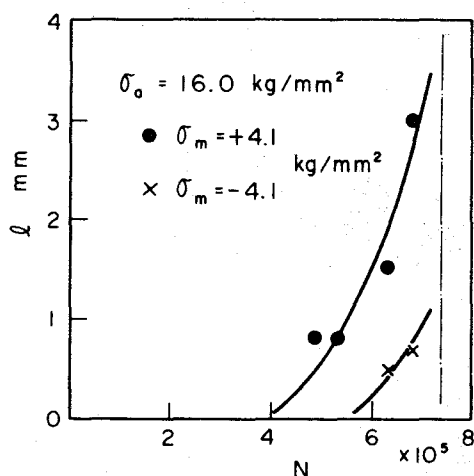


図4・11 crack の成長

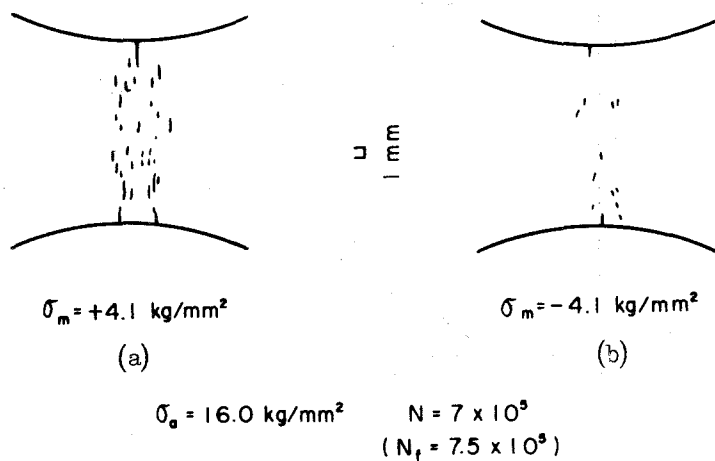
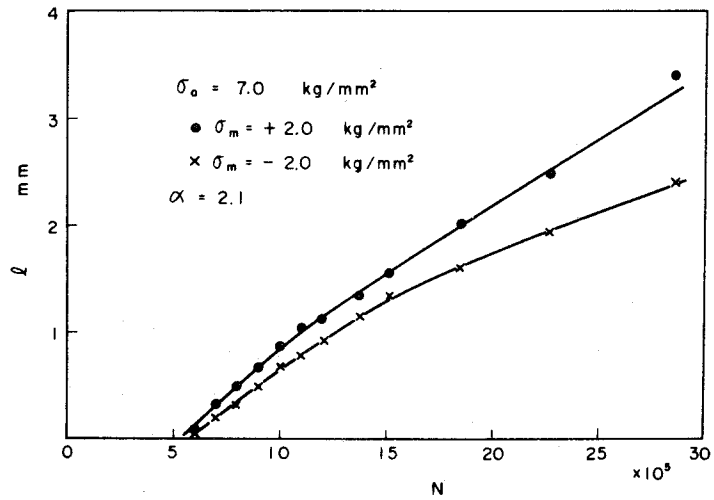


図 4.12 crack の分布状況

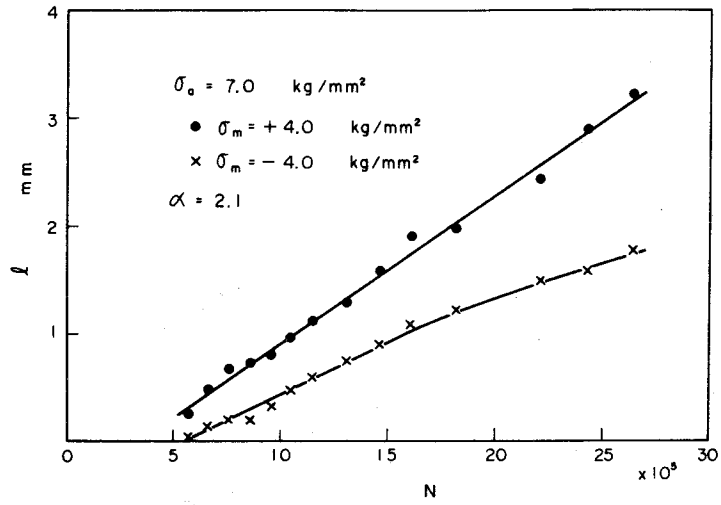
#### 4.2.2.5 切欠材における crack 成長の観察

平滑試験片についての実験結果から，平均応力の影響を論じる際には，その crack 成長に及ぼす影響を調べる必要のあることが明らかとなったので，この点を明確にするため次に中央に孔をあけた切欠試験片について crack の成長速度を観察した。負荷応力振幅をいずれも  $\sigma_a = 7.0 \text{ Kg/mm}^2$  として，平均応力が  $2.0 \text{ Kg/mm}^2$  の場合を図 4.13 (a) に， $4.0 \text{ Kg/mm}^2$  の場合を図 4.13 (b) に示す。なお，これらの応力値はいずれも公称応力値を示している。切欠係数は  $\alpha = 2.1$  であるから，応力振幅の最大値は孔の端において  $14.7 \text{ Kg/mm}^2$  となる。（図の●印は引張平均応力側，×印は圧縮平均応力側を表わす。）





(a)



(b)

図 4・13 crack の成長 (切欠き材)

crack の成長は、特に初期においてはほぼ直線的である。図 4・13 に見られるように、いずれの場合にも crack の成長は圧縮平均応力側に比べて引張側で速い。またその差は平均応力の増加とともに増大している。

#### 4・2・3 考 察

##### 4・2・3・1 半価幅の変化について

第 1 章でものべたように、焼きなまし材における両振り曲げ疲れの場合、疲れ過程は半価幅の変化の様子からほぼ三つの段階に分けることができると考えられているが<sup>(8)</sup>、平均応力が加わった場合にも半価幅の変化の傾向がほぼ同様であることから、両振りの場合と同じく疲れ過程をほぼ三つの段階にわけることができると考えられる。

半価幅の第 1 段階の変化は図 4・6 と図 4・7 とを比較すると、平均応力がある場合には半価幅の初期の増加が両振りの場合にくらべて急激になることがわかる。半価幅の初期の増加は主として材料の疲れ硬化によって生じると考えられるが、先にのべたように(1・2・1 節)、金属材料の変形に伴う硬化は転位密度の増加および substructure の形成がその主な原因であることが知られている<sup>(9)</sup>。したがって、残留応力の変化とも対比して考え合わせると、この半価幅の急激な増加も、疲れの初期に表面に一方向を向いた変化が生じたことによるものとして理解される。なお、電子顕微鏡による薄膜の直接観察によって、平均応力が加わると、subgrain の形成が促進されるという報告がなされているが<sup>(10)</sup>、これも上の結果と対応していると考えられる。すなわち、これら subgrain の形成が、半価幅の急増の主な原因であると考えられる<sup>(11)(12)</sup>。

初期の半価幅の変化が平均応力の正負にかかわらずほぼ同様であり、また残留応力の変化が対称的であること(図 4・8)は、平均応力の正負によらず第 1 段階のすべりがほぼ対称的に同程度起っていることを示している。この傾向は、顕微鏡によるすべり線の観察結果とも一致する。

続く疲れの第2段階における半価幅の変化は図4・7に示されるように、わずかながら平均応力の引張側の方が半価幅の変化が大きく、圧縮側はほぼ一定のままである。このことは、疲れの進行が引張側で速やかに進行し、圧縮側ではゆっくり進む傾向のあることを示していると考えられる。(このような平均応力下の疲れにおける微視的変形の差異はまた両振り応力下における残留応力発生とも関連していると考えられるが、この点については次の第5章において改めて考察する。)

#### 4・2・3・2 表面における残留応力変化および残留応力の分布について

両振りの繰返し曲げ応力が負荷された場合には、焼きなまし材においても疲れ過程の初期に圧縮の残留応力が生じ、その後第2段階に至って減少し、そのまま破断に至る(図5・2参照)。

平均応力がある場合、

図4・8に示されるように、疲れ過程の初期に平均応力をバランスするような残留応力が表面に生じることは、先にものべたように、表面のごく薄い層に一方向を向いた変形が起っていることを示しており、この残留応力は、図4・9に示すごとく約 $80\mu$ の深さを持っている。また、この残留応力によって表面に

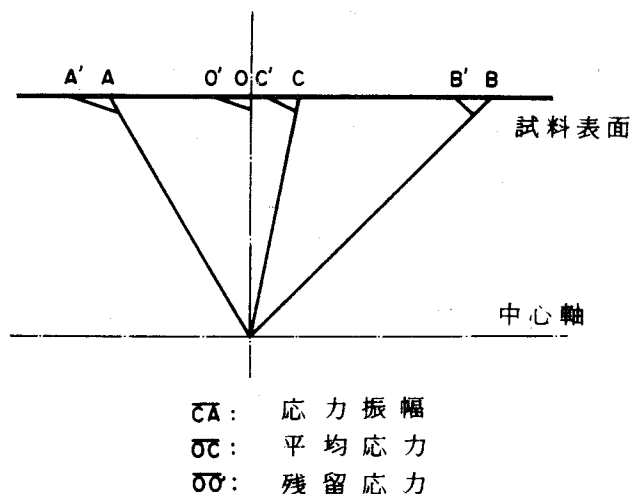
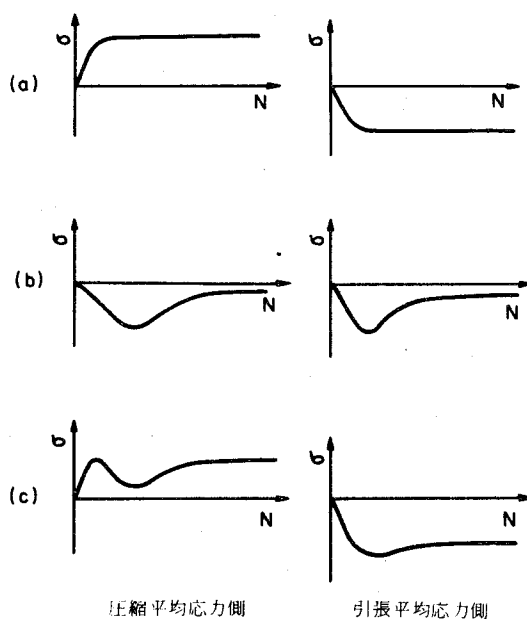


図4・14 残留応力分布の説明図

作用する繰返し応力の状態も変化する。すなわち近似的に考えると、図 4・14 において横軸を応力にとったとき、残留応力のない初めの状態では平均応力  $\overline{OC}$ 、応力振幅は  $\overline{AC}$  および  $\overline{BC}$  である。ここで一方向を向いた変形がおこり  $\overline{OO'}$  なる残留応力が生じると、表面における有効な平均応力は  $\overline{OC'}$  に減少する。応力振幅は  $\overline{A'C'}$ 、 $\overline{B'C'}$  に変化する。

さて、その後の残留応力変化は一見複雑であるが、これは図 4・15 に示すように、疲れの初期に平均応力の影響によって平均応力の方向とは逆の方向に生じた残留応力 (a) と、両振りの場合に生じる疲れ特有の圧縮残留応力 (b) が重ね合わさった結果 (c) のようになって現われたものと考えられる。このように、残留応

力が二つの異なった原因で発生していることは、その分布の深さが異なることによって認められる。すなわち、両振りの場合に見られた疲れによる残留応力は、その表面で最大値を示す繰返し数において、分布深さは約  $10\mu$  であって<sup>(13)</sup> 平均応力による残留応力分布の  $80\mu$  にくらべてはるかに薄い層である。したがって、前者から見たとき後者はほぼ一定とみなすことができる。すなわち、図 4・14 か



- (a) 平均応力によって現われる残留応力  
(b) 応力の繰返しによって現われる残留応力  
(c) (a) と (b) の合成されたもの

図 4・15 平均応力のある場合の表面における残留応力変化の説明図

らもわかるように、後者の残留応力によって表面のごく近傍の応力状態はほぼ両振りに近くなっており、ここに前者の残留応力が生じたものと考えられる。

さて、図 4・8 (a) からわかるように、疲れ特有の残留応力 (図 4・15 (b)) のあらわれる時期は、引張り平均応力側 (ピーク A) の方が圧縮平均応力側 (ピーク B) にくらべて早い。これは 4・1 節で述べた半価幅の第 2 段階の変化の傾向と一致している。従来考察されているように<sup>(8)</sup>、疲れの第 2 段階が microcrack の生成および成長の段階であることを考えると、これら microcrack の生成、成長の過程が、引張りの平均応力によって促進され、圧縮の平均応力によって遅延されることが推論される。

図 4・8 (b) の場合、圧縮側の残留応力変化はやや異なった傾向を示す。これは、両振りの耐久限度が  $14.0 \text{ Kg/mm}^2$  であるため、圧縮の平均応力の下では耐久限度以下であると考えて、図 4・15 (a) のような平均応力による残留応力と、耐久限度以下の場合のゆるやかに増加する疲れによる圧縮残留応力<sup>(8)</sup> (図 5・2 一点鎖線参照) が重ね合わさったものと考えると理解し得る。

#### 4・2・3・3 crack の成長について

繰返し数が進むにつれて顕微鏡によって識別しうる crack が現われ、次第に成長していくが、平滑試験片の場合は crack は一つではなく、図 4・12 のように多数の crack が見られることは、一般に平滑材における疲れ破壊の機構を考える際に注意する必要がある。crack の成長は図 4・11 に示すように引張平均応力側の方が速く進み、破断前の crack は圧縮側に比べて、数、長さともに大きい (図 4・12)。これは、平均応力の crack 成長に及ぼす影響の重要性を示していると考えられる。

この点は、切欠材における crack 成長の測定結果において一層明瞭になる。すなわち、図 4・13 からわかるように、少くとも顕微鏡的な大きさ

の crack に対しては、その成長が引張平均応力によって促進され、圧縮の平均応力によって遅らされることが確認される。

これら顕微鏡的な crack の成長と、それ以前の microcrack の成長とは幾分その機構が異なる点もあると思われるが、しかし平均応力による影響としては相似なものであると考えることができるであろう。すなわち、疲れ過程の第 2 段階における半価幅変化および残留応力変化についての結果とも考え合わせると、顕微鏡で識別しうる以前の microcrack の生成、成長も引張り平均応力によって促進されることが推論される。言いかえると、疲れにおける平均応力の影響あるいは一般に疲れ強さの問題を論じる際には、microcrack を含めて crack の生成および成長を考えることが必要であり<sup>(14)</sup>、疲れの最も長い期間をしめる第 2 段階が重要であると考えられる。なお、これらの点については、後に改めて第 6 章において、エネルギー的な観点からまとめて考察を加える。

### 4・3 ねじり疲れの場合

#### 4・3・1 実験方法

用いた材料は同じく低炭素鋼で、その化学成分を表 4・4 (a) に示す。試験片の形状、寸法を図 4・16 (a) に、また機械的性質を表 4・5 (a) に示す。(なお実験の都合上、半価幅測定の一部に表 4・4 (b) に成分を、表 4・5 (b) に機械的性質を示す材料も使用した。) 組織観察および crack の観察用としては、観察を容易にするため試験片中央部断面を一部平面とした図 4・18 (b) に示す断面形状のものを使用した。

用いた疲れ試験機は西原式ねじり疲れ試験機である。応力繰返し速度は 1530 rpm である。表 4・4 (a) に示す材料の S-N 曲線を図 4・17 に示す。

X線測定に際しては，撮影中試験片を一定の速度で回転させた。かたさ測定にはビッカース微小硬度計を用い，おもりは1 Kgとした。その他の実験条件は前節と同様である。

表 4・4 成分分析値 (%)

	C	M <sub>n</sub>	S <sub>i</sub>	P	S	S <sub>n</sub>	C <sub>r</sub>
(a)	0.15	0.60	0.25	0.030	0.022	—	0.46
(b)	0.13	0.55	0.20	0.014	0.005	—	0.18

表 4・5 機械的性質

	ねじり降伏応力 kg/mm <sup>2</sup>	ねじり強さ kg/mm <sup>2</sup>	結 晶 粒 度 平均直径 mm
(a)	19.7	34.4	0.027
(b)	20.3	36.8	0.023

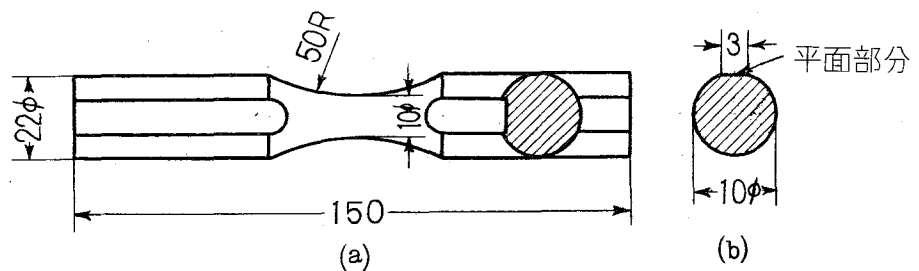


図 4・16 試験片の形状 ((b) は組織観察用試験片の中央断面の形状)

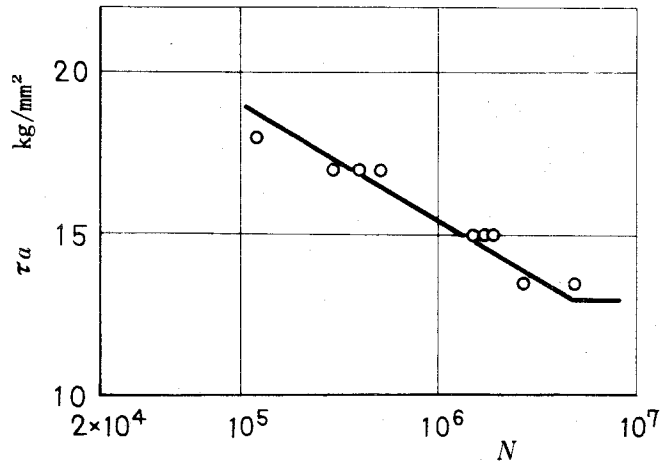


図 4・17 S - N 曲線 (ねじり)

#### 4・3・2 実験結果

##### 4・3・2・1 半価幅の変化

ねじり疲れ過程における回折線半価幅変化を測定した結果を図 4・18 および図 4・19 に示す。図 4・18 は両振りの場合の結果であるが、変化の傾向は曲げの場合 (図 4・6) とほぼ同様である。次に平均応力が負荷された場合として、平均応力が一定で応力振幅が変化した場合の例を図 4・19 に示す (なお、図 4・18 および図 4・19 に示す実験には、先に表 4・4(b) に示した材料を使用した)。

これらの結果から、ねじり疲れの場合にも半価幅の変化の傾向は先の曲げ疲れの場合とほぼ同様であることがわかる。これは半価幅の変化が主として繰返しすべりによる結晶の微視的変形によることを考えれば理解される。



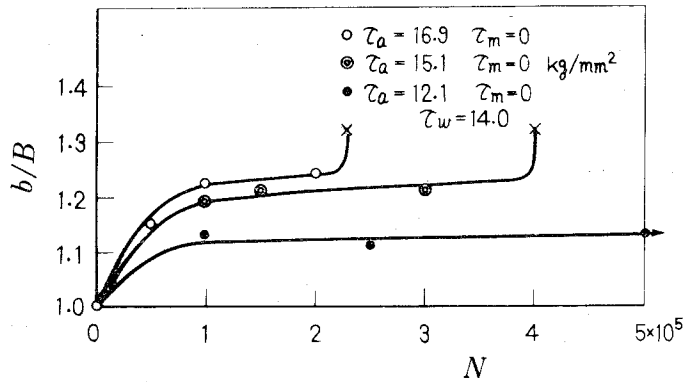


図 4・18 半価幅の変化(両振りの場合)

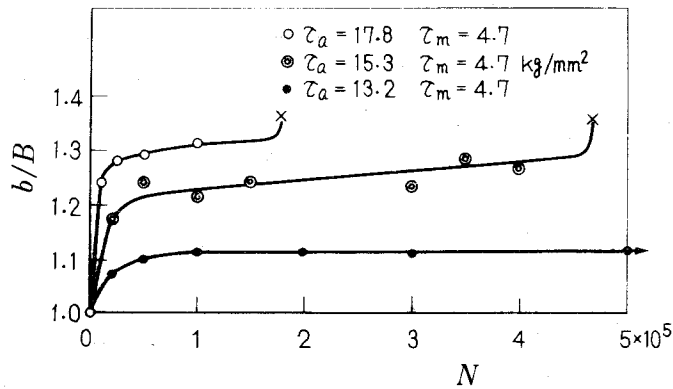


図 4・19 半価幅の変化(平均応力一定の場合)

#### 4・3・2・2 残留応力の変化

まず、両振りねじり応力下の残留応力変化を半価幅との対応において調べた結果を図 4・20 に示す。図において、たて軸は半価幅比  $b/B$  および試料表面の軸方向残留応力  $\sigma_r$  で、横軸は繰返し数比  $n/N$  である。(なお、軸方向残留応力を測定したのは、それが最も精度よく X 線的に測定されるからである。) 図からわかるように、耐久限度 ( $\tau_w = 13.0 \text{ Kg/mm}^2$ ) 以上の、 $\tau_a = 13.5, 15.0$  および  $17.0 \text{ Kg/mm}^2$  の応力振幅が負荷された場合の残留応力変化はいずれもほぼ同様に、初期にわずかの引張りの残留応力が発生し、繰返し数比 0.15 付近でピーク値をとった後、減少しほぼ一定値を保ったまま破断に至る。

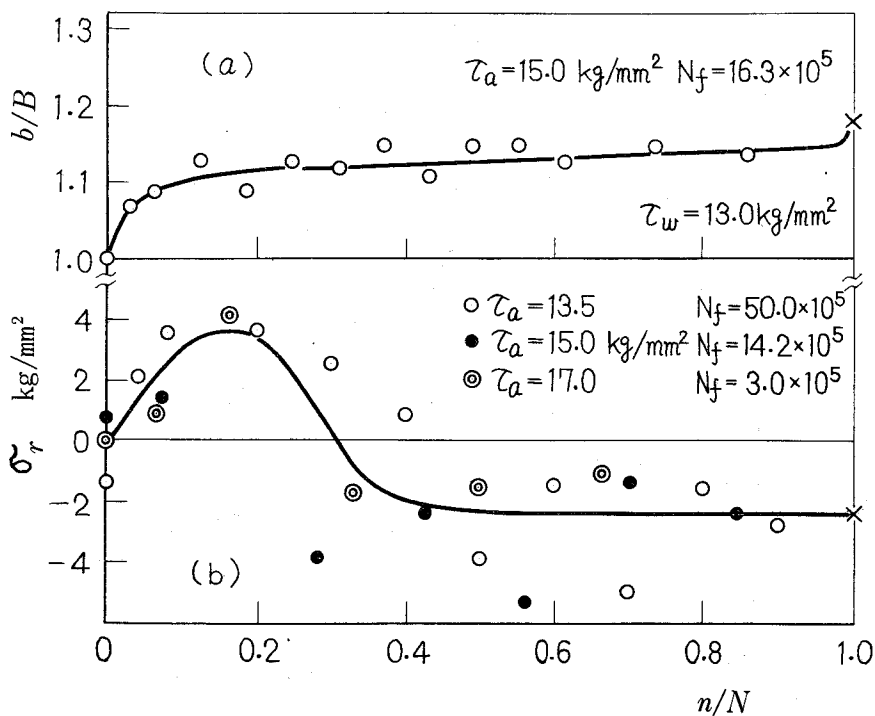


図 4・20 軸方向残留応力の変化 (両振り)

図 4・21 は応力振幅  $\tau_a = 15.0 \text{ Kg/mm}^2$ , 平均応力  $\tau_m = 2.1 \text{ Kg/mm}^2$  および  $4.2 \text{ Kg/mm}^2$  が加わった場合の半価幅および残留応力の変化を示す。図に見られるように、平均応力が重ね合わさった場合の残留応力の挙動には、両振りの場合と比較して大きな変化が見られず、疲れ過程の残留応力変化の全体の傾向は、ねじり疲れの場合平均応力によってほとんど影響を受けないことがわかる。この結果は曲げ疲れの場合と対称的である。

上にのべたねじり疲れにおける残留応力変化はいずれも試験片軸方向についてであった。ねじり応力の場合、主応力方向は残留応力を測定した軸方向とは  $45^\circ$  をなす方向にあるため、発生する残留応力についてもその方向性

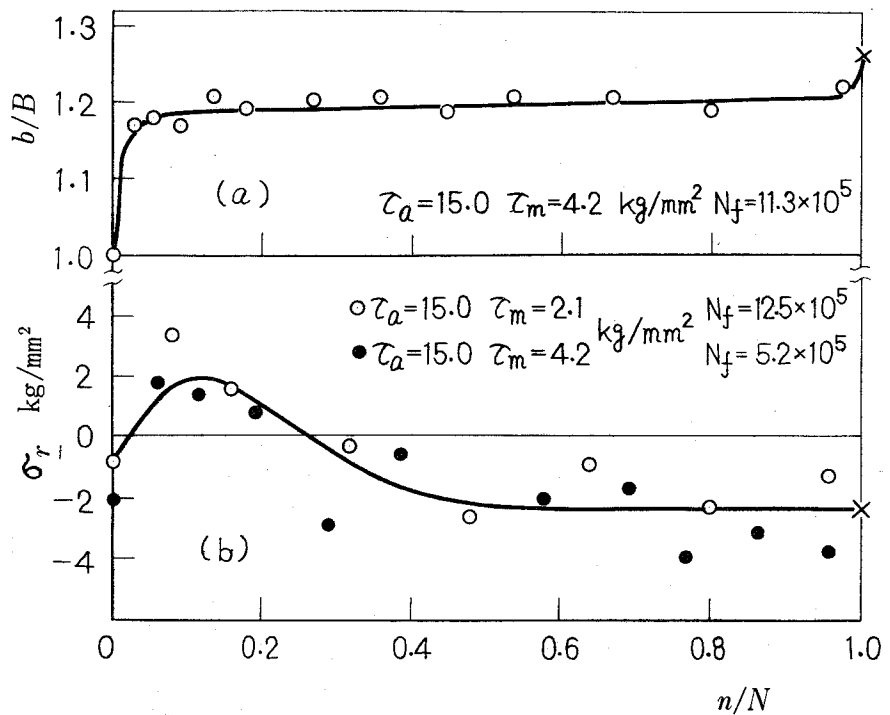


図 4・21 軸方向残留応力の変化  
(平均応力)

を検討する必要がある。そこでまず、これら軸方向と直角をなす接線方向について、同様に疲れにおける残留応力の変化を測定した結果を図 4・22 に示す。図は応力振幅  $\tau_a = 15.0 \text{ Kg/mm}^2$  の両振りの場合、およびこれに平均応力  $\tau_m = 4.2 \text{ Kg/mm}^2$  が加わった場合の  $\sigma_r$  の変化である。図に見られるように、接線方向の残留応力変化も軸方向と同じく初期に引張りの残留応力を生じ、その値もほぼ等しい。

さらに軸方向および接線方向に引張残留応力の生じる時期に軸方向と  $45^\circ$  をなす方向（主応力方向）に発生する残留応力を求めた結果を図 4・23 に示す。図は応力振幅  $\tau_a = 15.0 \text{ Kg/mm}^2$ ，平均応力  $\tau_m = 4.2 \text{ Kg/mm}^2$  を負荷

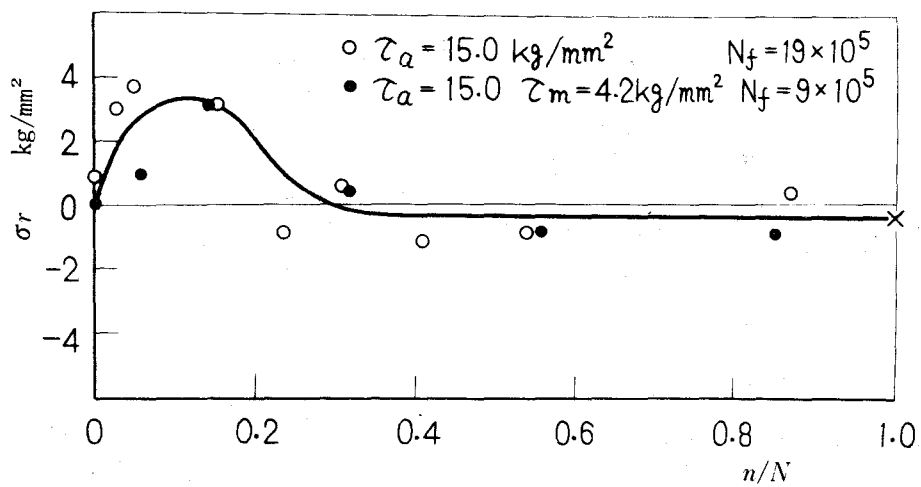
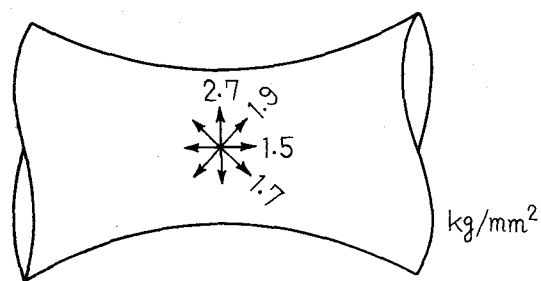


図 4・22 接線方向残留応力の変化



$$\tau_a = 15.0, \tau_m = 4.2 \text{ kg/mm}^2, N = 1.7 \times 10^5$$

図 4・23 疲れ過程の初期に発生する引張残留応力の方向性

し、繰返し数  $N = 1.7 \times 10^5$  で試験を停止して試料表面の引張残留応力の方向性を求めた結果である。これから、初期の引張りの残留応力は、いずれの方向についてもほぼ同じ値を示すことがわかる。（なお、残留応力発生の微視的な要因については次の第5章で改めて検討する。）

#### 4・3・2・3 かたさの変化

ねじり疲れにおける試料表面の微小かたさの変化を測定した結果を図4・24に示す。図に示されるごとく、かたさの変化は両振りの場合、（ $\tau_a = 15.0 \text{ Kg/mm}^2$ ）と、平均応力が重複した場合（ $\tau_a = 15.0$ ， $\tau_m = 4.2 \text{ Kg/mm}^2$ ）とでほぼ同様の变化を示す。

すなわち、かたさは疲れの初期に急に増加し、次に急激に減少した後ほとんど一定値を保ったまま破断に至る。

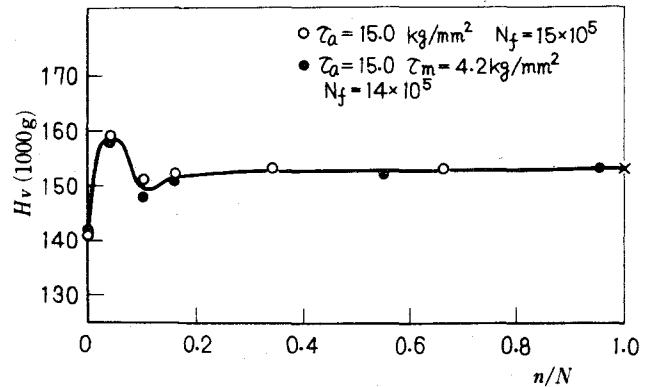


図4・24 かたさの変化

#### 4・3・2・4 組織観察

ねじり応力の場合、疲れに伴って現われるすべり線は、最大せん断応力の方向、すなわち接線方向および軸方向を向いたものが大多数をしめる。これらすべり線の一例を図4・25(a)に示す。また曲げの場合と同様に疲れの進行にともなって、すべり線に沿って、あるいはすべった結晶の粒界付近から crack が発生し、それらが徐々に成長する。ねじり疲れにおいては、crack の成長は初期にはすべり方向と同じく最大せん断応力方向に生じるものが多い。そのような crack の一例を図4・25(b)に示す。



(a) すべり線,  $N = 2 \times 10^5$



(b) crack,  $N = 9 \times 10^5$

↔ 試片軸方向 (×300)  
 $\tau_a = 15.0$ ,  $\tau_m = 4.2 \text{ Kg/mm}^2$ ,  $N_f = 11 \times 10^5$

図 4・25 組織変化の例

顕微鏡的な crack の発生、成長は接線方向にくらべて軸方向のほうが速い傾向が認められた。しかし、最終的な破断に至るのは接線方向の crack あるいはこれと  $45^\circ$  をなす主応力方向の crack によってであり、したがって破断直前には軸方向に多数の crack の入っているのが認められた。

(なお、顕微鏡によるすべり線あるいは crack の挙動の観察によっては、両振りの場合と平均応力が負荷された場合において、顕著な差異は認められなかった。)

#### 4・3・3 考 察

##### 4・3・3・1 平均応力の影響

図 4・20 と図 4・21 あるいは図 4・22 に示したように、ねじり疲れにおける軸方向および接線方向の残留応力変化の全体の傾向は、両振りの場合と平

均応力のある場合とで、繰返し数比で整理したとき差異が認められない。

また、半価幅の変化、かたさ変化、あるいは組織変化においても、両振りの場合と平均応力のある場合で大きな差異が認められない。したがってねじり疲れの場合には、平均応力は疲れ現象に根本的な変化をもたらさず、結局、疲れ寿命に対する平均応力の影響があまり大きく現われない（図 4・1）と考えられる。

ところで、図 4・25 に示すように、すべり線が最大せん断応力の方向、すなわち軸方向および接線方向に現われること、またその後の crack の成長も同じく最大せん断応力の方向であることは、疲れにおけるせん断応力の働きの重要性を示している。この点は疲れ機構を考える際に注意する必要がある。

なお、ねじり疲れの場合、crack の成長はきわめて緩慢であり、特に軸方向の crack は光学顕微鏡によっても寿命の約半分の繰返し数においてすでに認められた。この事実も、先にのべた疲れにおける crack の成長過程の重要性を示していると考えられる。

#### 4・3・3・2 かたさの変化について

図 4・24 に示したように、ねじり疲れの場合、疲れ過程のごく初期にかたさの増すことは、板曲げの場合<sup>(8)</sup>と同様であり、これは疲れ硬化によるものである。しかし、その後の変化はねじりにおいては曲げの場合とやや異なり  $n/N = 0.1 \sim 0.2$  付近でかたさの減少が見られる。これは表面に発生した残留応力の影響であると考えられる。すなわち、一般にかたさに影響する因子の中で重要なものとして、材料の硬化と表面における応力の二つがある<sup>(15)</sup>。応力の影響としては、同一材料についても表面に引張応力があるとかたさが低下する。両振り疲れに発生する初期の残留応力は、板曲げでは圧縮であり（図 5・2 参照）、これに反してねじりでは引張りである（図 4・20 ～ 4・22）。したがってこの残留応力変化との対応から、初期のかたさ変化

が板曲げの場合やや単調に増加するのに反して、ねじりにおいてはいったん増加した後  $n/N = 0.1 \sim 0.2$  付近で減少することが理解できる。

#### 4・4 結 言

以上得られた結果を要約すると次のようになる。

- (1) 曲げ疲れにおいて平均応力が加わった場合、初期にこの平均応力と逆符号の残留応力が発生する。これは、平均応力の負荷によって、表面に一方向を向いた変形が生じたことを示している。
- (2) 曲げ疲れの場合、半価幅変化、残留応力変化および組織変化を対応させた結果、初期の疲れ硬化（第1段階）には平均応力の正負による顕著な差異は認められなかった。一方、切欠材の crack の観察によって、顕微鏡的 crack（疲れの第3段階）の成長には平均応力の影響が認められた。すなわち、引張平均応力は crack の成長速度を速め、圧縮応力は遅くする傾向がある。したがって、疲れの第2段階における半価幅および残留応力の変化、あるいは顕微鏡による crack の観察結果をも考え合わせて、第2段階の microcrack についても同様に平均応力はその生成、成長の速度に影響すると推論される。
- (3) ねじり疲れの場合、半価幅、残留応力、組織あるいはかたさの変化には、平均応力の顕著な影響が認められなかった。したがって、ねじり疲れの場合、疲れ機構はねじり平均応力によって本質的な影響を受けず、その結果として疲れ寿命あるいは疲れ強さも平均応力によって大きく変化しないものと考えられる。



## 文 献

- (1) 石橋, "金属の疲労と破壊の防止" (昭29), 50, 養賢堂。
- (2) 河本, "金属の疲労" (昭37), 30, 朝倉。
- (3) G. Sines, NACA Tech. Note 3495 (1955).
- (4) 西原, 河本, 機械学会論文集, 7 - 29 (昭16), 85; 9 - 35 (昭18), 33.
- (5) 西原, 遠藤, 機械学会論文集, 17 - 61 (昭26), 146.
- (6) 西原, 小林, 機械学会論文集, 12 - 42 (昭27), 65.
- (7) たとえば, 材料学会編, "X線応力測定法", (昭41), 養賢堂.
- (8) 平, 本田, 松木, 機械学会論文集, 28 - 194 (昭37), 1335.
- (9) 鈴木, "転位論入門", (昭42), アグネ.
- (10) J. C. Grosskreutz, J. Appl. Phys. 34 (1963), 372.
- (11) 平, 林, 機械学会論文集, 33 - 245, (昭42), 1.
- (12) 仁田編, "X線結晶学(下)", (1961), 489, 丸善.
- (13) 平, 本田, ほか, 材料試験, 11 (昭37), 699.
- (14) P. J. E. Forsyth, Acta Met., 11 (1963), 703.
- (15) 平, 吉岡, Proc. 6th. Jap. Cong. Test. Mat., (1963), 82.

## 第 5 章 疲れ過程に発生する残留応力

### 5・1 緒 言

疲れにおける残留応力の問題は、疲れ寿命に影響する点で重要であるだけでなく、疲れ機構を考える上でも重要な研究課題である。ところで、前加工あるいは熱処理によって初期に残留応力を持つ材料の場合については比較的多くの研究がなされているが、他方疲れ過程に発生する残留応力についての研究は少なく、未解決の点も多い。

従来の研究<sup>(1)～(3)</sup> および第 4 章でのべた結果から、焼きなまし材の疲れ過程に発生する残留応力はほぼ次の 3 種に大別されることが明らかとなった。

- (a) 両振り曲げ疲れ過程に発生する圧縮残留応力
- (b) 両振りねじり疲れ過程に発生する引張り残留応力
- (c) 平均応力下の曲げ疲れに発生する平均応力と逆符号の残留応力

これら焼きなまし材の疲れ過程における残留応力の発生およびその変化に関する問題点としては、次の二つの局面が考えられる。

- (i) 残留応力の発生あるいは変化の機構、およびその疲れ機構との関連
- (ii) 発生した残留応力の疲れ寿命への影響

本章では、上にのべた残留応力の種類およびそれに対する問題点を考慮し、従来からなされている研究<sup>(1)～(3)</sup>とも対比して、未だ明らかにされていない次の諸点、すなわち、

- (1) 両振り曲げおよびねじり疲れ過程における残留応力の変化の機構およびその疲れ機構との関連。
- (2) 残留応力変化とその疲れ寿命への影響
  - (2-1) ねじり疲れにおいて応力振巾が変化する場合

(2-2) 曲げ疲れにおいて平均応力が変動する場合  
 について実験的な検討を加えるとともに、疲れ過程における残留応力の問題  
 に総合的な考察を行なう。

## 5・2 実 験

### 5・2・1 実験方法

本章で行なった実験をまとめて表 5・1 に示す。使用した材料の成分分析  
 値を表 5・2 に、機械的性質を表 5・3 に示す。試験片形状は先と同じ板曲  
 げ(図 4・2(a))、ねじり(図 4・16(a))および回転曲げ(図 1・14(a))

表 5・1 実験方法

	(a)	(b)	(c)
材 料	炭 素 鋼		銅
焼きなまし条件	910°C 1 hr		500°C 1 hr
負 荷 応 力	板 曲 げ	ね じ り	回 転 曲 げ
疲 れ 試 験 機	西 原 式	西 原 式	小型小野式
X 線 測 定	平行ビーム式 カウンタ法	フィルム法	フィルム法

表 5・2 成分分析値(%)

炭 素 鋼	C	Si	Mn	P	S	Ni	Cr	Mg	Cu
	.16	.26	.47	.018	.025	.02	.02	—	.08
銅	Sn		Pb		Fe		Cu		
	.002		.002		.0025		99.95		

表 5・3 機 械 的 性 質

炭 素 鋼	降 伏 応 力	引 張 り 強 さ	ね じ り 降 伏 応 力	ね じ り 強 さ
	26.8	40.5	15.2	34.8

銅	降 伏 応 力 (0.2%)	引 張 り 強 さ
	2.8	22.6

(kg/mm<sup>2</sup>)

であるが、一部残留応力の方向性の測定には 図 5・1 (a)に示す形状の曲げ  
 疲れ試験片を、また圧縮平均応力下の疲れ寿命の測定には、図 5・1 (b) に  
 示す台形断面の曲げ疲れ試験片<sup>(4)</sup>を用いた。なお、試験片は電解研磨を施  
 して実験に供した。平均

応力の変動は、適当な応  
 力繰返し数ごとに平均応  
 力の負荷方向を逆転させ  
 ることにより行なった。

X線応力測定の方法は  
 第 4 章でのべたのと同様  
 であるが、一部平行ビー  
 ム式ディフラクトメータ  
 を用いた。X線測定の際  
 の諸条件を表 5・4 に示  
 す。

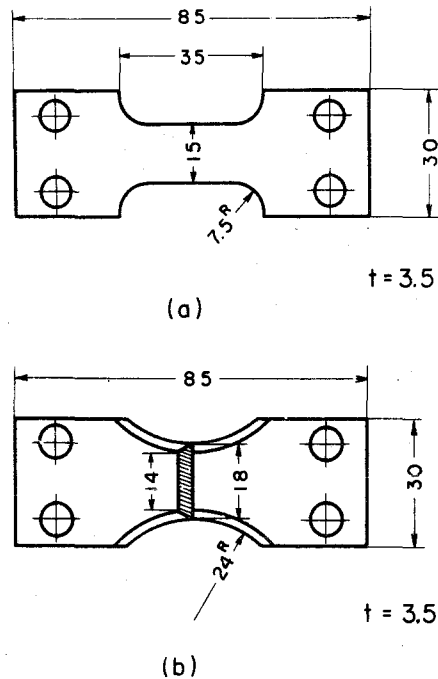


図 5・1 試 験 片

表 5 ・ 4 X 線 実 験 条 件

	平行ビーム形 ディフракトメーター	背面反射カメラ
特 性 X 線	Co K $\alpha$	Co K $\alpha$
回 折 面	Fe (310)	Fe (310), {一部 Cu(400)}
管 電 圧	30 KV	40 KV
管 電 流	5 mA	40 mA
ス リ ッ ト	2x10 (一部 2x2) mm <sup>2</sup>	1 mm $\phi$ ダブルピンホール
フ ィ ル ム	Fe はく	Fe はく
Count Range	200 c/s	
Time Constant	8 sec	
フィルム試料間距離		65 mm
露 出 時 間		10 min
比 較 物 質		Ag 粉
ピーク位置決定法	1/2 ピーク法	1/8 ピーク法

## 5・2・2 実験結果

## 5・2・2・1 両振り疲れ過程における残留応力変化

まず両振り疲れ過程に発生する残留応力の性質について、種々の面から実験的に検討する。従来の研究<sup>(1)~(3)</sup>においては、発生する残留応力の測定は試験片軸方向のみについて行われ、その方向性の検討が不十分であった。そこで、炭素鋼の両振り板曲げ疲れについて、発生する残留応力の方向性を調べたが、その結果を図 5・2 に示す。図は一定応力振巾  $\sigma_a = 18.0 \text{ Kg/mm}^2$  が負荷された場合の、疲れ過程での軸方向 (○印) およびそれと直角な方向 (●印) の表面残留応力の変化を示している。軸方向の残留応力は、従来知られているように<sup>(2)</sup>、初期に圧縮残留応力が生じ、疲れの第2段階で減少し、そのまま破断に至る傾向を示している。これに対して、負荷応力に直角な方向には、対称的にごくわずかながら引張り残留応力が生じている。

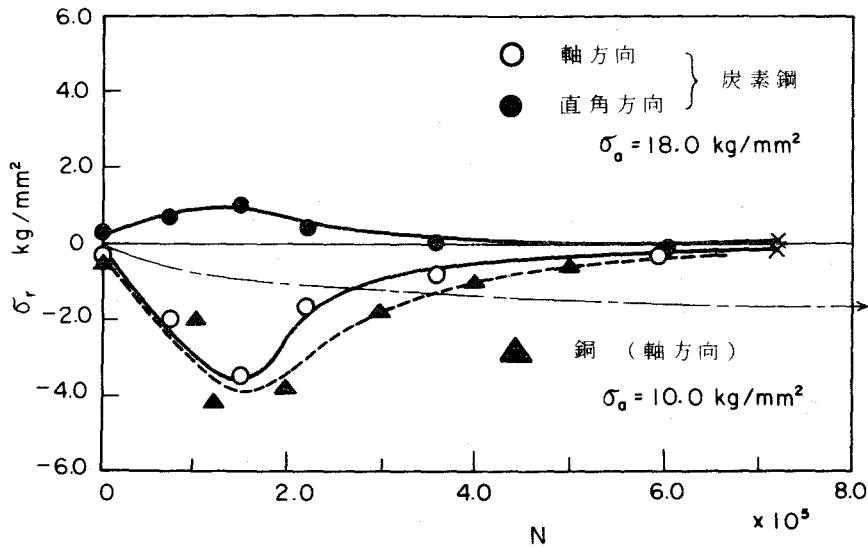


図 5・2 曲げ疲れ過程における残留応力変化

これは、試験片表面層が軸方向に塑性的に伸び、その結果として横方向にわずかに塑性的に縮んでいることを示していると考えられる。図中の一点鎖線は比較のため示した疲れ限度以下の応力の場合の軸方向残留応力変化<sup>(2)</sup>である。

次に残留応力変化に及ぼす試験材料の影響について調べるため、fcc 金属である銅について回転曲げ疲れ過程における軸方向残留応力変化を測定した結果を同じく図 5・2 に破線で示す。(なお、本銅材の  $10^7$  耐久限はほぼ  $6 \text{ kg/mm}^2$  である。) 銅においても変化の傾向は炭素鋼と同じく初期に圧縮の残留応力を発生することがわかる<sup>(3)</sup>。

図 5・3 は、炭素鋼について、先に第 4 章に一部のべた両振りねじり疲れにおける残留応力変化を、試料表面各方向について測定した結果である。ねじり疲れの場合、発生する残留応力の絶対値は小さいが、曲げの場合とは対称的に初期に引張りの残留応力を生じ、これは最大せん断応力方向(軸方

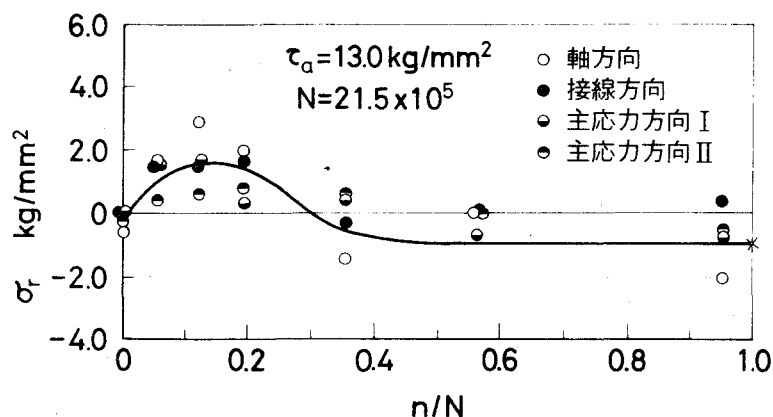


図 5・3 ねじり疲れ過程における残留  
応力変化（炭素鋼）

向および接線方向），および主応力方向（軸方向と  $45^\circ$  をなす方向）のいずれについてもほぼ同様であることがわかる。

さて、疲れ過程に発生する残留応力の性質の一つとして、その熱的な安定性を検討した結果を図 5・4 に示す。すなわち、図は炭素鋼の両振り曲げおよびねじり疲れにおいて、残留応力がピークをとる付近の繰返し数（ $n/N \cong 0.12$ ）において疲れ試験を中止し、試験片を  $100^\circ\text{C}$  の熱湯中に保持したときの表面軸方向の残留応力の変化を示している。（なお、横軸は  $100^\circ\text{C}$  での保持時間で、その後の空冷中の時間は含まれていない。また曲げ、ねじり疲れとも各 2 本ずつの試験を行なった結果を示している。）

図に見られるように、ねじり疲れで生じた引張り残留応力は、約 5 分間の加熱で減少し、消滅する。一方、曲げ疲れの場合には残留応力は減少せず、両者の残留応力発生機構の相違を示している。さらに曲げの場合には、圧縮残留応力のわずかの増加が見られるが、これはねじりで生じる引張り残留応力

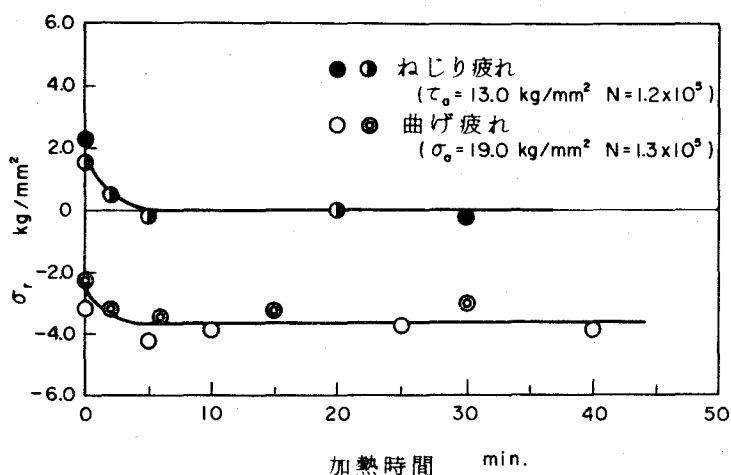


図 5・4 疲れ過程に発生した残留応力の加熱（100℃）による変化

と同種の残留応力が、曲げの場合にも曲げ特有の圧縮残留応力に重ね合わさってごく表面近くの層に生じており、これが同じく熱的に消滅したために、見かけ上圧縮残留応力が増加したものと考えられる。

この結果から、ねじり疲れにおける引張残留応力の発生に寄与している機構ないしは材料内部の微視的組織変化が、100℃程度の温度で動きうる性質のものであること、他方曲げ疲れに特有な残留応力は100℃の加熱によって減少しない性質を持っていることがわかる。

#### 5・2・2・2 負荷応力の変動と残留応力変化

##### 5・2・2・2・1 応力振巾の変化と残留応力変化

ここでは、負荷応力が変動したとき残留応力の変化がどのような影響を受けるかについて検討する。まず両振り曲げ疲れにおいて、発生した圧縮残留応力がピークをとる付近の繰返し数において応力振巾が増加した場合図 5・5



に示すように軸方向の圧縮残留応力に新たなピークを生じるが、これは従来報告されている傾向<sup>(1)(2)</sup>と一致する。

さて次に、ねじり疲れの場合についても同様の変化が見られるかどうかを検討するために、2段増加応力下のねじり疲れにおける試料表面各方向の残留応力変化を測定した結果を図5・6 (a)～(c) に示す。ここに横軸は累積繰返し数比  $\sum_i n_i / N_i$  で整理している。図5・6 (a) および (b) は、一次応力  $\tau_{a1} = 13.0 \text{ kg/mm}^2$  をそれぞれ繰返し数比  $n_1 / N_1 = 0.13$  および  $0.18$  まで負荷した後、二次応力  $\tau_{a2} = 15.0 \text{ kg/mm}^2$  とした場合の結果である。図5・6 (c)は残留応力が圧縮に転じた後、負荷応力を増加させた場合の変化を示す。図5・6 からわかるように、ねじり疲れにおける残留応力の変化の傾向は、2段増加応力の場合も累積繰返し数比で整理すると、一定応力振幅の場合(図5・3)と全く同様である。これは曲げ疲れの場合とは傾向を異にしており、ねじり疲れの場合疲れの進行が直線的(linear)であることを示していると考えられる。

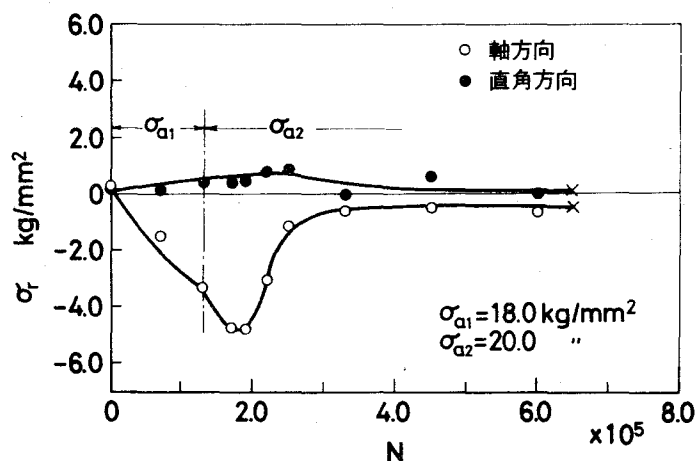


図5・5 2段増加応力下の曲げ疲れにおける残留応力変化

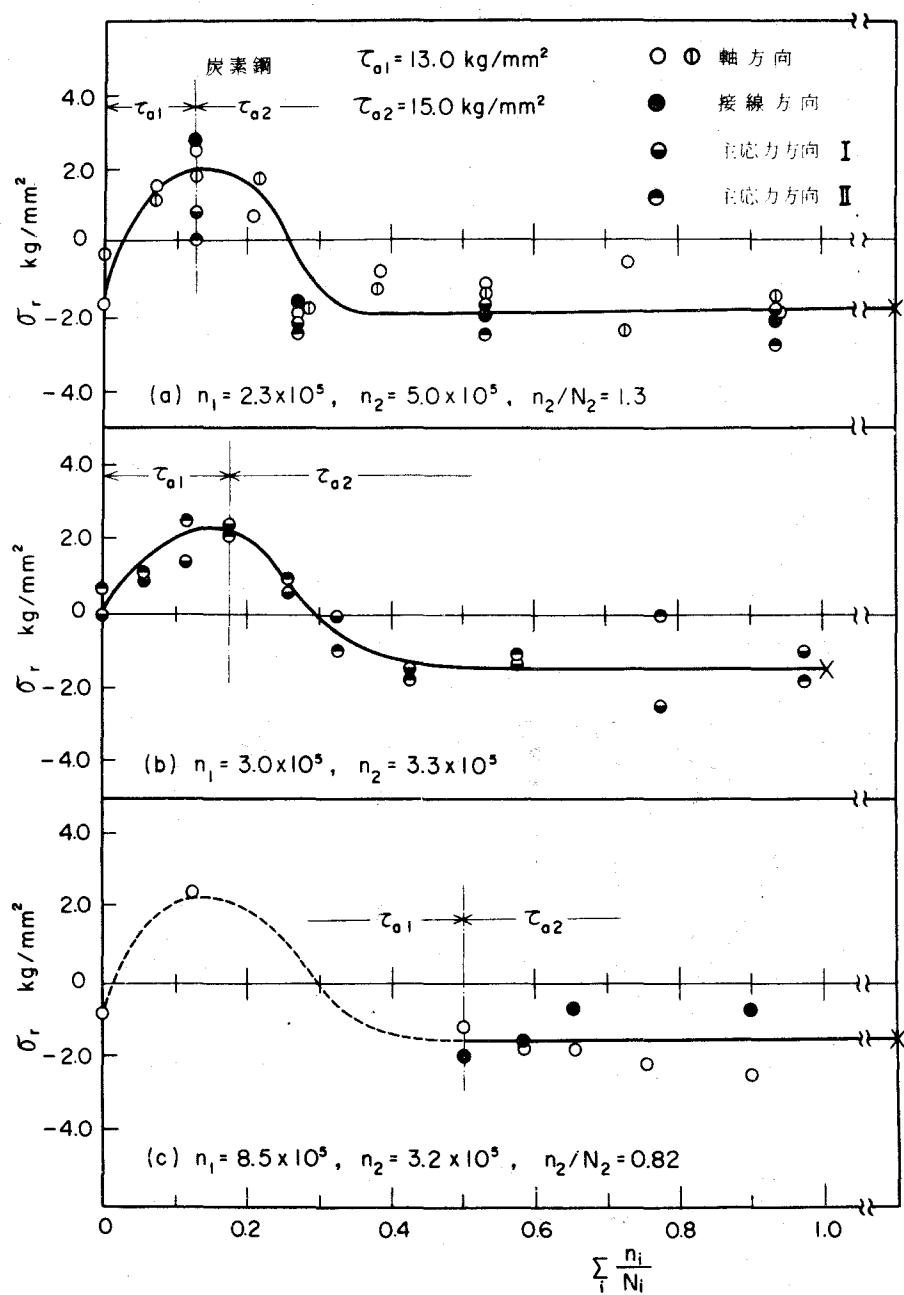


図 5・6 2 段増加応力下のねじり疲れ  
における残留応力変化

#### 5・2・2・2・2 平均応力の変動と残留応力変化

曲げ疲れの場合、繰返し応力に一定の平均応力が負荷されると、平均応力とは逆の符号の残留応力が発生する（図 4・8 参照）。したがってこの場合、平均応力が変動するとそれに対応して残留応力も変化することが期待される

図 5・7 は応力振幅  $\sigma_a = 19.0 \text{ kg/mm}^2$ 、平均応力  $\sigma_m = \pm 6.0 \text{ kg/mm}^2$  を  $n_0 = 4.0 \times 10^4$  ごとに正負に矩形波状に変動させた場合の残留応力変化を測定した結果である。平均応力一定の区間の残留応力変化は、最初の期間を除いて疲れ過程ではほぼ同様である。そこで図 5・7 の残留応力変化を、平均応力変動後の繰返し数  $n$  で整理した結果が図 5・8 (a) である。

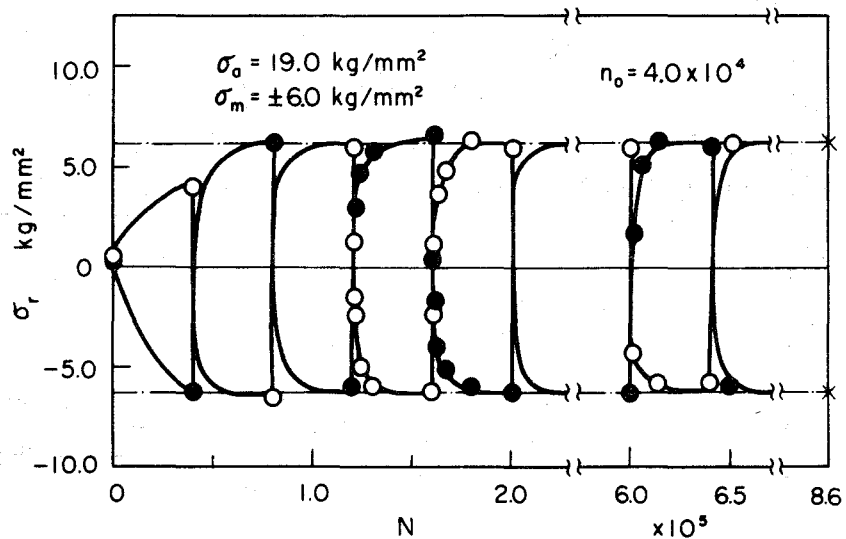


図 5・7 平均応力変動下の曲げ疲れにおける残留応力変化

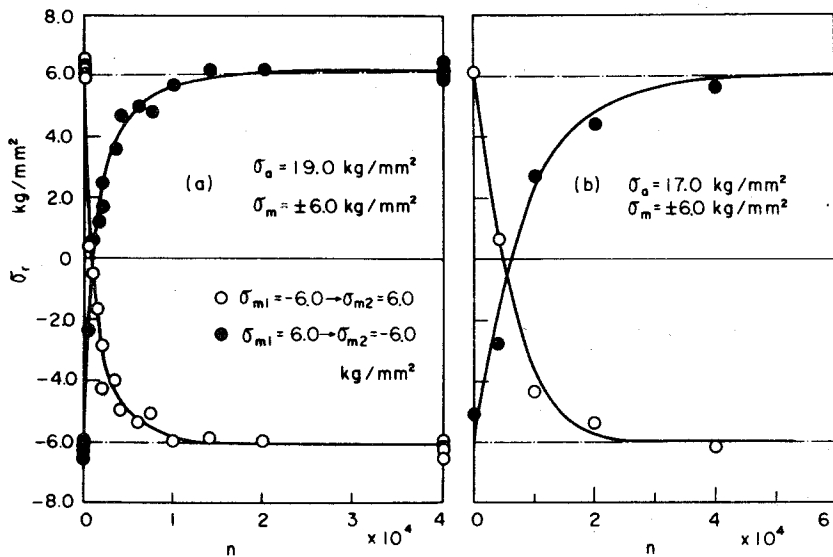


図 5・8 平均応力変動後の残留応力変化

図 5・8 (b) は同じく応力振幅  $\sigma_a = 17.0 \text{ kg/mm}^2$ ，平均応力  $\sigma_m = \pm 6.0 \text{ kg/mm}^2$  を  $n_0 = 10^5$  ごとに正負に変動させた場合の軸方向残留応力の変化を示す。これらの図からわかるように、残留応力は平均応力が変化した後遅れを伴って変化し、再び負荷平均応力に対応した一定の値に達する。図 5・8 の (a) と (b) を比較すると、同じ大きさの平均応力変動に対しても繰返し応力振巾の大きい方が残留応力の変化が急激であることがわかる。

ここで、一定に達した残留応力の値を  $\sigma'_r$  とし、添字 1, 2 でそれぞれ平均応力変動の正の側と続く負の側を表わすものとする、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r1}' &= -\alpha \sigma_{m2} \\ \sigma_{r2}' &= -\alpha \sigma_{m1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.1)$$

と書くことができる。平均応力変動時の残留応力の変化を図式的に書くと、  
 図 5.9 のようになる。 $\alpha$  は一般に  $0 < \alpha \leq 1$  であるが<sup>(6)(7)</sup>、本実験  
 の場合、図 5.8 の結果から、

$$\alpha \cong 1 \dots\dots\dots (5.2)$$

となる。今平均応力の絶対値が等しく、正負に変動する場合を考えているか  
 ら、

$$\sigma_{m1} = -\sigma_{m2} \equiv \sigma_{m0} \dots\dots\dots (5.3)$$

とおける。

ところで、平均応力が変動しない場合の残留応力値を基準にとったときの  
 平均応力変動直後の余分の残留応力を  $\sigma_s$  とし、その初期値を  $\sigma_s'$  とす  
 ると、(5.1)~(5.3) 式より

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{s2}' &= 2 \sigma_{r1}' \cong 2 \sigma_{m0} \\ \sigma_{s2}' &= 2 \sigma_{r2}' \cong -2 \sigma_{m0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.4)$$

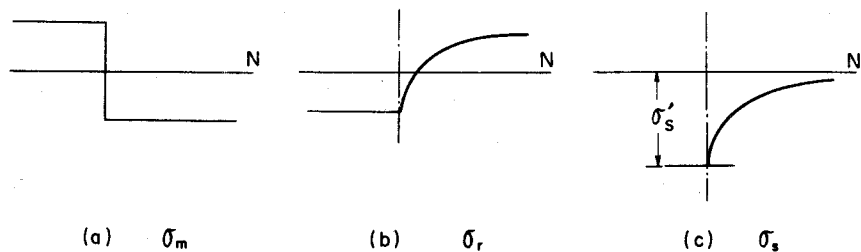


図 5.9 平均応力の変動と残留応力  
 変化の説明図

となる。この残留応力  $\sigma_s'$  は応力の繰返しとともに減少していくが、減少してしまうまでに一種の平均応力として作用し、寿命に影響を及ぼすと考えられる。

ここで残留応力の減少の様子を調べるため、図 5・8 を残留応力の減少量  $\sigma_s / \sigma_s'$  の対数と繰返し数  $n$  の関係で整理したものが 図 5・10 である。

図からわかるように、両者の関係はほぼ直線的であって、

$$\sigma_s = \sigma_s' e^{-x n} \dots\dots\dots (5.5)$$

の関係が成り立つ。 $x$  の値は負荷応力振幅  $\sigma_a$  が大きくなるほど大きくなり、残留応力の減少は急となる<sup>(8)</sup>。

また 図 5・10 からわかるように、平均応力が負から正に転じたとき、すなわち引張平均応力側（○印）の方が圧縮側（●印）より残留応力の変化が急である。この結果は、疲れにおける表面層の微視的変形が引張平均応力下においてより速く進むことを示している。この事実は、第 4 章でのべたように、引張り平均応力が負荷された場合疲れの進行が速くなり、その結果疲れ寿命が低下すること、あるいは両振り応力下の疲れにおいて圧縮残留応力が発生すること、と密接な関連を持っており、疲れの本質的な特性を示していると考えられる。

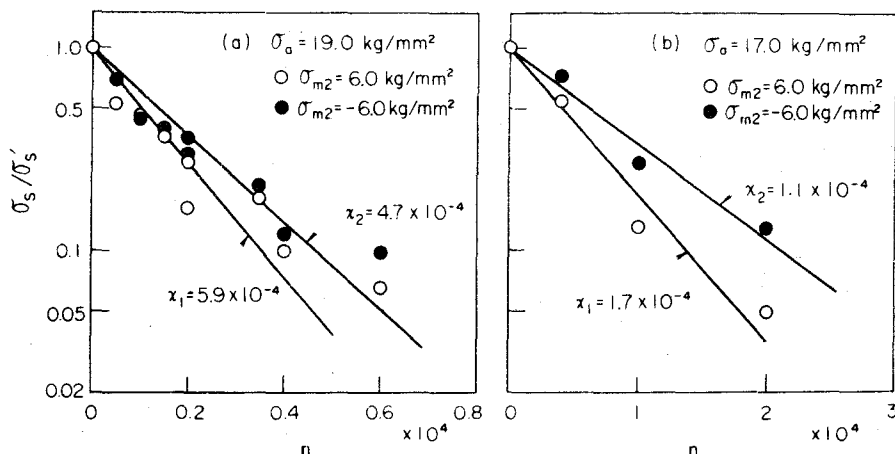


図 5・10 平均応力変動後の残留応力変化

### 5・3 両振り疲れ過程における残留応力変化の考察

先の実験結果に示されるように、両振り疲れ過程の初期に発生する残留応力は、ねじり疲れの場合には引張りであり、これに対して曲げ疲れの場合には軸方向に圧縮となっている。表面に残留応力が発生することは、表面層が内部に対して相対的に伸びて（あるいは縮んで）いることを意味している。したがって問題は、繰返し応力のもとで表面層がなぜ伸びる（縮む）かという点にある。また、残留応力変化の問題は疲れ機構とも密接に関連していると考えられ、したがって金属学のおよび力学的な観点の双方から解明する必要があると考えられる。ここでは、先の実験結果における残留応力の特徴を検討し、これに基づいて残留応力の発生ならびに変化の機構について考察を行なう。

#### 5・3・1 ねじり疲れにおける残留応力変化

図5・3に示すように、ねじり疲れの場合、応力繰返し初期に軸方向に引張りの残留応力を生じるが、その絶対値は曲げ疲れ(図5・2)に比較して小さい。

ところで、巨視的な塑性力学的観点から見た場合このような残留応力の発生は予想されない。この点を実験的に確かめるため、単純ねじり変形に伴う表面における軸方向残留応力変化を調べてみるとその結果は表5・5のようになる。すなわち、数%といった大きなねじり変形によっても表面に発生する軸方向残留応力は  $1 \text{ Kg/mm}^2$  以下であって、疲れの場合にくらべてはるかに少ない。したがって、

ねじり疲れにおける残留  
応力の発生は何らかの微  
視組織的な要因によるも  
のであると考えられる。  
実験結果から認められ  
るねじり疲れにおける引

表 5・5 単純ねじり変形に伴う  
表面軸方向の残留応力

せん断ひずみ $\gamma \%$	軸方向残留応力 $\sigma_r \text{ kg/mm}^2$
0	-0.7
1	0
4	0.5

張り残留応力の特徴は、まず残留応力が試料表面のいずれの方向にもほぼ一様に生じていることであり、試料表面層が一様に収縮していると考えられる点である。これは元来、ねじり疲れの表面での応力状態が二軸であり、直角な二方向に同じ残留応力変化が生じれば等方性となることから理解される。前章でのべたように、残留応力が平均応力の有無によってあまり影響を受けないことを考え合わせると、この残留応力の発生には繰返し応力の働きが重要であることが推論される。

また第2の特徴は、図 5・4 に示すように、ねじり疲れで発生する残留応力が 100°C 程度の加熱で消滅する性質を持っていることである。このことは、種々の微視的な要因（格子欠陥）の中で、原子空孔（vacancy）の挙動が残留応力の発生に寄与していることを示唆していると考えられる。

よく知られているように、疲れにおいては応力繰返しとともに転位の前後運動が起り、それに伴ってらせん転位の交叉による jog からの原子空孔の形成が予測され<sup>(9)~(11)</sup>、これは直接実験的にも確かめられている<sup>(10)(11)</sup>ほか、疲れにおけるひずみ時効<sup>(12)</sup>などこれを裏付ける実験事実も多い。したがって、引張り残留応力の発生には、空孔の挙動が関連していることが予想される。

すなわち、一般に塑性変形に伴って発生する空孔の濃度  $C$  は、

$$C = A \epsilon^m \quad \dots\dots\dots (5.6)$$

で与えられることが知られている。<sup>(13)~(15)</sup>。ここで  $\epsilon$  は塑性ひずみ、 $A, m$  は定数である。疲れの場合にも先の半価幅の増加（たとえば図 4・18）からわかるように、試料表面には微視的な変形が生じている。この微視的な変形は後にものべるように表面に近いほど多いと考えられるので、表面近傍での微視的なひずみの分布は図 5・11 (a) のようになると考えられる。したがって、(5.6) 式から、過剰原子空孔の分布は図 5・11 (b) のようになると予想される。



さて、応力繰返しによって生じた空孔は付近に強力な吸収される場所（sink）があると消滅するが、結晶の表面はそのような sink であることが知られている。したがって、空孔の濃度分布はこれらがつり合った状態では図 5・11 (c) のようになるものと考えられる。変形により空孔が生ずると材料が膨張することは実験的にも認められているが<sup>(11)</sup>、空孔の存在による膨張は空

孔濃度に比例するから、表面にくらべて内部が膨張したことになり、結局表面に引張応力が発生することが期待される。

このような機構の起り得る可能性を確かめるためには、空孔の量と空孔の存在によって生じる応力  $\sigma_v$  の関係を調べておく必要がある。 $4\text{Kg/mm}^2$  程度の残留応力を発生するのに必要な空孔の濃度差はおおよそ次のように見積ることができる<sup>(16)</sup>。空孔が系につけ加えられたときの自由エネルギーの変化を  $dF$  とすると、

$$\frac{dF}{dN_v} = kT \ln \left( \frac{C}{C_0} \right) \dots\dots\dots (5.7)$$

で与えられる。ここに  $N_v$  は空孔の数、 $C$  は空孔の実際の濃度で、 $C_0$  はその平衡濃度である。これより空孔の消滅によって生じる応力  $\sigma_v$  は、

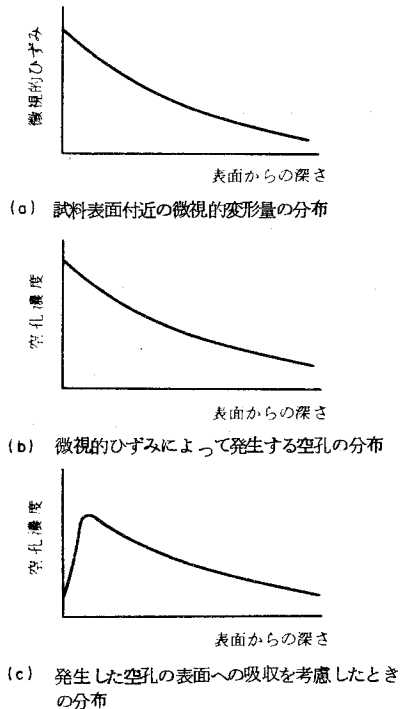


図 5・11 引張残留応力発生の説明図

$$\sigma_v = \frac{\text{Energy}}{\text{Volume}} = \frac{dF}{dV} = \frac{kT}{V_0} \left\{ \ln \left( \frac{C}{C_0} \right) \right\} \dots \dots (5.8)$$

で与えられる。ここに  $V_0$  は 1 個の空孔の体積である。常温付近では  $kT \cong 1/40 \text{ eV}$  であり、また鉄では  $V_0 \cong 10^{-23} \text{ cm}^3$  であるから、 $kT/V_0 \cong 20 \text{ Kg/mm}^2$  となる。したがって、 $\sigma_v = 4 \text{ Kg/mm}^2$  の残留応力の発生に必要な空孔の量は、これらの値を代入して、

$$C/C_0 \cong 1.2 \quad \dots \dots \dots (5.9)$$

となる。すなわち、平衡濃度の約 20% の空孔の濃度差が必要となる。今、 $C_0$  としてかりに常温付近の空孔の平衡濃度を用いると  $C_0 \cong 10^{-13}$  程度であり<sup>(16)</sup>、必要な空孔の量は約  $2 \times 10^9$  個/ $\text{cm}^3$  となる。疲れにおいてすべり帯の単位面積当り毎秒発生する空孔の数はだいたい  $7 \times 10^{14}$  個/ $\text{cm}^2$  と見積られており<sup>(17)</sup>、上の値は十分期待し得るものであって、空孔による残留応力の発生が可能なものであることがわかる。(ただしこれらの点についてのより定量的な議論は、残留応力の測定精度などの問題があって、現在のところ困難である。)

なお、先に図 5.4 に示した残留応力の熱的な変化からも予想されるように、ねじり疲れの場合と同種の引張り応力は曲げ疲れにおいても発生しているが、曲げ疲れにおいては圧縮応力の発生の方が絶対値が大きいため見かけ上打ち消されているものと考えられる。この考え方は、曲げ疲れで発生する残留応力のピーク値が表面層よりも少し内部において最大となること<sup>(18)</sup>によっても裏付けられる。

ねじり疲れの場合、初期の引張り残留応力は第 2 段階で減少するが、これはこの時期が microcrack の発生の期間に相当していることを考え合わせると、これらの microcrack により応力が解放されることによるものと考えれば理解される。

### 5・3・2 曲げ疲れにおける残留応力変化

#### 5・3・2・1 圧縮残留応力発生の機構

図 5・2 に見られるように、残留応力の変化は炭素鋼（fcc 金属）においても銅（fcc 金属）においても同様の傾向を示している。他方、Wood ら<sup>(19)</sup> は、表面の電子顕微鏡観察の結果、bcc 金属と fcc 金属では微視的な crack の成長の様式が異なることを認めている。このことから、残留応力の発生機構は、結晶形の差異による微視的な crack の成長機構の差異によっては直接的な影響を受けない性質のものであると考えられる。

ところで、疲れにおける圧縮残留応力の発生機構を考える際に見逃してはならない事実として、一般に塑性変形において、真応力と真ひずみの関係で整理したとき引張り変形と圧縮変形では応力—ひずみ曲線にほとんど差異は生じないことがあげられる。この点を、本実験材料の銅についても調べたが、両者の変形応力にはくびれを生じるひずみ（約 32%）までは差異が認められなかった。すなわち、一般の塑性変形においては材料全体としての変形挙動については引張りと圧縮では対称であることが指摘される。

次に、同じく銅について最大応力  $11.5 \text{ Kg/mm}^2$ （真応力）の引張りおよび圧縮の片振り繰返し応力を、繰返し数  $N=2800$  回加えた後の残留応力を測定した結果<sup>(20)</sup>によると、残留応力は引張り側で  $-5.9 \text{ Kg/mm}^2$ 、圧縮側で  $3.3 \text{ Kg/mm}^2$  であって、引張り片振り疲れにおいて発生する圧縮残留応力の方がその絶対値が大きい。したがって、上にのべたように塑性変形の場合に差異がなかったことと考え合わせると、片振り疲れの場合に残留応力の絶対値に差を生じた原因としては次の二つの可能性が考えられる。

- (1) 塑性変形では引張りと圧縮で変形が対称であっても、繰返し応力が作用すると引張りと圧縮で変形に差が生じるため。
- (2) 試料全体としては引張りと圧縮で対称であっても、表面の変形には拘束状態の違いなどによって引張りと圧縮で差があるため。

上の片振りの実験では、変形量も大きく、残留応力の差異を生じた原因とし

てはこの(1)と(2)の両者が考えられるが、(2)の影響が実際どの程度あるかについては現在のところあまり明瞭ではない。しかしながら、本章の主題である低応力疲れの場合には、いわゆる巨視的な変形はほとんど見られず、結晶内のすべりが主であることから、上の(2)の影響は非常に小さいと考えられる。結局、図 5・2 に示されるような圧縮残留応力の発生は、繰返し両振り応力下での引張りと圧縮の微視的変形の非対称が主原因であると考えることができる。

これは図 5・10 に示した平均応力変動の際の残留応力変化が、引張り平均応力下で速いこと ( $x_1 > x_2$ ) から裏付けられるが、また Kemsley ら<sup>(21)</sup> も純銅のひずみ一定下の塑性疲れにおいて、引張り時と圧縮時で flow stress の差が生じ、それは繰返し数とともに明瞭になり、またひずみ振巾にも依存することを認めている。これらはともに、上の(1)の要因が存在することを示すものである。

ところで、一般に疲れ現象の基本的な特徴として、疲れ破壊が低い負荷応力において起こることがあげられる。特に炭素鋼の場合は疲れ限度は降伏点よりかなり低い。したがって、疲れ過程における表面層の変形は、試料表面の顕微鏡観察によっても認められているように、すべりすなわち転位の運動（特に前後運動）がそのおもなものであると考えられる。このような表面層の変形が残留応力の発生あるいは疲れ破壊をもたらすと考えられるのであるから、すべりを起させるせん断応力の繰返しが残留応力の発生あるいは疲れ機構を支配する最も重要な因子であると考えることができる。

しかしながら、せん断応力の繰返しまたはすべりという点に関しては、繰返し曲げと繰返しねじりにおいて差異はない。したがって、曲げとねじり疲れにおいて生ずる残留応力の挙動の違いは、せん断応力以外の二次的な要因の結果によると考えられる。そのような要因として最も妥当なものは負荷応力により生ずるすべり面のまわりの応力場の差であると考えられる。

この内部応力状態の違いについては、次の二つの見方が可能である。

(1) 曲げ疲れにおいては最大せん断応力面に垂直な方向に垂直応力成分が存在するが、ねじり疲れでは存在しない(図 5・12)。

(2) すべり面近傍に静水圧応力成分

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \dots\dots\dots (5.10)$$

が曲げ疲れでは存在するが、ねじりでは存在しない(図 5・12)。ここに、 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  は主応力成分である。

以下においては、これら二つの考え方の妥当性について、材料の微視的な変形挙動を考え合わせながら検討する。

(1)  $\alpha$ 鉄中の転位の動きやすさは不純物による摩擦力あるいは Peierls-Nabarro 力に支配されることが知られている<sup>(22)</sup>。そこでまず垂直応力成分の Peierls-Nabarro 力への影響を考える。Peierls-Nabarro 力(臨界せん断応力) $\tau_c$  は次のように与えられる<sup>(22)</sup>。

$$\tau_c = \frac{2G}{\Lambda} \exp(-2\pi a/\Lambda b) \dots\dots\dots (5.11)$$

ここに、 $b$  は Burgers vector,  $a$  はすべり面に垂直な方向の原子間隔、 $G$  はせん断弾性係数、 $\Lambda$  は定数である。したがって、 $b$  に対して原子間隔  $a$  が相対的に変化すれば、臨界せん断応力の値が変化する。しかしながら、等方性材料が一軸応力を受ける場合には、 $a/b$  の値が変化しないことを容易に示すことができ、したがって臨界せん断応力  $\tau_c$  は引張りの半サイクルと圧縮の半サイクルで差異がない。

炭素や窒素のような不純物による摩擦力に対して、垂直応力がどのように働くかを理論的に求めることはかなり困難である。しかしながら、先にのべたように、引張り試験と圧縮試験において、応力-ひずみ曲線が一致するという実験事実は、摩擦力についても引張り応力の場合と圧縮の場合とで等しいことを示しているものと考えられる。

これらの点を考慮すると、結局垂直応力成分の符号の違いによって、引張

りの半サイクルの転位の動きが圧縮時のそれより大きいことは期待できず、したがってこのような理由から表面層が伸びるという可能性は否定的である。

(2) 種々の格子欠陥の中で、最も応力の静水圧成分に敏感なのは、体積をもつ欠陥、たとえば原子空孔、pore, crack などである。しかしながら、ここで考えているのは疲れ過程の初期段階であり、通常 pore や crack が多数認められることはないから、これらは除外しうると考えられる。したがって、最も可能性の強い要因として原子空孔の影響が考えられる。

ところで、Eshelby<sup>(23)</sup> は、等方連続体において、任意の応力場と半径  $r_1$  の点欠陥の相互エネルギー (interaction energy) が次のようになることを示している。

$$E_p = \frac{4}{3} \pi \delta r_1^3 \Phi_p \dots\dots\dots (5.12)$$

ここに、 $\delta$  は定数で、 $\delta r_1$  は点欠陥により引き起こされる半径方向の変位を表わす。また、 $\Phi = 9(1-\nu)/(1+\nu)$  であって、 $\nu$  は Poisson 比である<sup>(24)</sup>。原子空孔の体積より小さいから、空孔に対して  $\delta$  は負の値をとる。(5.12)式に示されるように、点欠陥に対しては、周囲の応力状態は静水

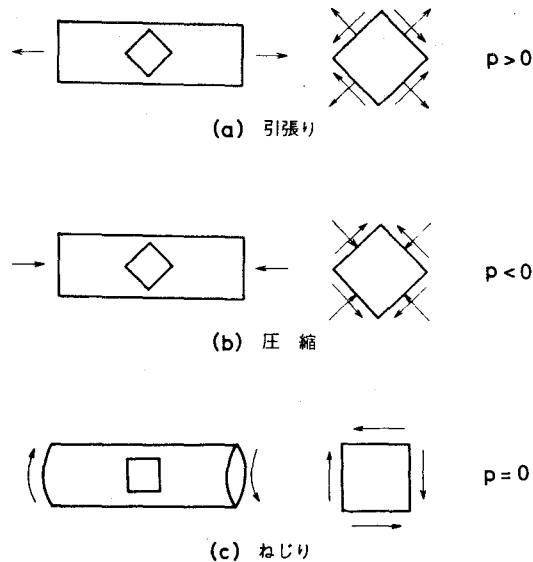


図 5.12 すべり面上の垂直応力成分および静水圧応力成分  $p$

圧力成分  $p$  の形で作用を及ぼす。

原子空孔はそれ自身の移動によって変形に關与する<sup>(25)</sup> ほか、折出物やその他障害物に pile up した転位を上昇運動によって解放することによっても変形に寄与する<sup>(26)</sup>。したがって、転位に働くせん断応力成分が同一であっても、転位近傍に過剰の空孔が動きやすい状態で存在して居れば変形はより多く進むと考えられる。

過剰な原子空孔が数多く存在する場合の拡散係数は、

$$D(p) = D(0) \frac{C(p)}{C(0)} \exp\left(\frac{p V_m}{k T}\right) \dots\dots (5.13)$$

で与えられる。ここに、 $D(p)$ ,  $D(0)$  および  $C(p)$ ,  $C(0)$  はそれぞれ静水圧応力成分  $p$  および  $0$  のもとでの拡散係数および空孔濃度であり、 $V_m$  は空孔の移動に対する活性化体積である。( (5.13) 式の誘導については付録 5.6.1 でのべる。)

空孔の移動が変形の支配的な要因である場合には、材料の変形速度  $\dot{\epsilon}$  は空孔の拡散速度に比例すると考えられる。したがって、引張り静水圧成分  $p_+$  の下での変形速度  $\dot{\epsilon}(p_+)$  と、圧縮静水圧成分  $p_-$  の下での変形速度  $\dot{\epsilon}(p_-)$  の比は、(5.13) 式より

$$\frac{\dot{\epsilon}(p_+)}{\dot{\epsilon}(p_-)} = \frac{D(p_+)}{D(p_-)} = \frac{C(p_+)}{C(p_-)} \exp\left(\frac{(p_+ - p_-) V_m}{k T}\right) \dots\dots\dots (5.14)$$

で与えられる。ここに、 $D(p_+)$ ,  $D(p_-)$  および  $C(p_+)$ ,  $C(p_-)$  はそれぞれ静水圧応力成分  $p_+$  および  $p_-$  の下における拡散係数および空孔濃度を表わす。

(5.12) 式からも予想されるように、一般に空孔は引張り静水圧応力のもとにおいての方が圧縮のもとでより転位の交叉によって作られやすいと考えられる。すなわち、

$$C(p_+)/C(p_-) \geq 1 \quad \dots\dots\dots (5.15)$$

(ただし、この具体的な値については現在のところよく知られていない。)

$V_m$ の値は金属によって異なるが、一般に $(0.1 \sim 0.3)\Omega_0$ 程度と言われている<sup>(27)</sup>。ここで仮りに  $V_m = 0.2\Omega_0$  とし、先の実験(図5.2)の条件を代入して(5.14)式の値を求めると、 $\sigma_a = 18.0 \text{ Kg/mm}^2$  より、 $p_+ = -p_- = 6 \text{ Kg/mm}^2$  , また  $T = 290^\circ \text{ K}$ 。  $\alpha$ 鉄の原子容積は  $\Omega_0 = 11.7 \times 10^{-24} \text{ cm}^3$  であるから、

$$\frac{\dot{\epsilon}(p_+)}{\dot{\epsilon}(p_-)} \cong 1.06 \frac{C(p_+)}{C(p_-)} > 1 \quad \dots\dots\dots (5.16)$$

を得る。

上の計算((5.14)式)では、ひずみ速度  $\dot{\epsilon}$  が拡散係数  $D$  に比例するとしたが、一般に変形に対する原子空孔の寄与が支配的な要因でない場合には、 $\dot{\epsilon}(p_+)/\dot{\epsilon}(p_-)$ の値は変形過程中的の空孔の役割が減ずるに仕掛けて、(5.16)式の結果から期待される値よりも小さくなり、1に近づくと考えられる。しかしながら空孔が変形に何らかの役割をはたすかぎり、 $\dot{\epsilon}(p_+)/\dot{\epsilon}(p_-) > 1$  となることが期待される。結局、応力が両振りであっても、引張りの半サイクルと圧縮の半サイクルでは静水圧応力成分が異なるため原子空孔の移動速度が異なり、結果として微視的変形量にも差異が生じると考えられる。もちろん、1サイクル中の表面層の伸びの差異は非常に小さいと考えられるが、それは各サイクルごとに累積され、その結果表面に圧縮残留応力が発生すると考えられる。

なお、ねじり疲れでは  $p = 0$  であり、したがって曲げの場合のような圧縮残留応力は発生しない。



先に述べたように，原子空孔は一般に応力の繰返しによる転位の動きによって材料中に大量に発生することが期待される。電子顕微鏡による直接観察によれば，塑性変形と疲れにおける微視的変形には根本的な差異はないが，疲れにおける変形の方がより substructure が明瞭であるという結果<sup>(28)</sup>が報告されている。これも一種の回復とみなし得ると考えられ，応力の繰返しあるいは空孔の動きを示していると考えられる。いいかえると，疲れにおける変形の特徴の一つは，一般の塑性変形にくらべて応力の繰返しによる過剰の原子空孔が存在することであると見なすことができると考えられる<sup>(29)</sup>。

#### 5・3・2・2 圧縮残留応力減少の機構

##### 5・3・2・2・1 ま え が き

図 5・2 の実験結果に示されるように，一旦発生した圧縮残留応力は続く過程において減少するが，この時期は疲れの微視的な crack が成長する時期，あるいは疲れが試料表面から内部へ進行する時期に相当している。しかしながら，前者の crack の成長によって残留応力が減少することを期待するのは，今の場合残留応力が圧縮であるためいささか困難である。

ところで，曲げ疲れにおいて発生する圧縮残留応力の特徴の一つに，その試料内部への分布がある。すなわち，表面で残留応力がピークをとる繰返し数においては，残留応力は内部に行くにしたがって単調に減少するが，表面での残留応力が減少した直後では，試料の内部に圧縮残留応力のピークをもつことが報告されている<sup>(18)</sup>。これは，表面層に伸びが生じ，圧縮残留応力が発生した後，伸びが次第に試料内部に向かって伝わっていくことを示していると考えられる。したがって，試料表面での圧縮残留応力の減少を論じるには，疲れの試料表面から内部への進行との関連において検討する必要があると考えられる。

一般に，疲れ破壊は材料の表面から生じることが知られており，表面の重

要性が指摘されている<sup>(30)</sup>。しかしながら、通常の弾性力学をそのまま適用するかぎり、表面が特別な挙動を示すことは期待されない。すなわち弾性論によれば、等方体が軸方向にひずみを受ける場合、軸と直角な断面内ではひずみは一定となる。しかしながら、材料のごく表面近傍を考えるならば、実際にはこのひずみ一定の条件が厳密に成り立っているとは必ずしも言えないと考えられる。これは先に第3章でのべた、異方性多結晶の変形において応力一定の条件がむしろ安定であるという結果からも推論される。したがって、疲れにおける表面残留応力変化の問題を扱うには、それに適した材料の変形の不連続体的な解析方法を開発する必要があると考えられる。(ただし先の第I部で扱った問題がX線回折線半価幅の変化とそれに対応した多結晶体の変形の model であったのに対して、ここでは取扱う対称が半巨視的性格を持つ残留応力であることから、必然的に結晶粒よりも一段 dimension の大きい層(結晶粒の平面的集合)について考える必要が生ずる。)

ここで問題の特性を整理してみると次のようになる。

(a) 材料の表面のごく近傍での変形が起こる場合には、変形に対して周囲から受ける拘束が小さく<sup>(31)</sup>、この傾向は繰返し応力が作用する場合にはさらに顕著になると考えられること。この点は初期に残留応力を持つ材料に繰返し応力を加えると、残留応力が急激に減少すること<sup>(7)</sup>からも裏付けられる。

(b) 疲れ変形では材料中の変形が試料全体で同時に生ずるのではなく、表面から次第に内部に伝わっていく傾向があること。

(c) X線応力測定によると、表面から10数 $\mu$ 程度の層内の平均的な応力が測定されること。

そこで以下では、まず材料を表面から表面に平行な薄い層に分け、不連続体として相互の拘束を考えて解析する方法について一般的にのべ、次いでこれを曲げ疲れにおける圧縮残留応力の減少過程に適用して考察を加える。

### 5・3・2・2・2 変形の不連続体的解析

今、図 5・13 (a) に示すように、物体を表面に平行な薄い層に分割し、層と層の境界には互に拘束力が働く薄い境界層があるものとする。ただし、軸に直角な断面内で境界層の占める面積は相対的に小さく、無視できるものとする。ここで次の仮定をおく。

- (1) 変形は層に平行な一軸方向にのみ生じ、各層内では応力、ひずみは一定である。層の境界では、ひずみは不連続である。(なおこれは、層内では平均ひずみを考え、変化分を境界層に押込めたとも見なすことができる。)
- (2) 各層には両隣りの層からずれ(ひずみの不連続量)に対応した拘束力が作用する。一般的にはこの拘束力はずれの関数と考えられるが、ここでは簡単のためこの拘束力がずれ量に比例するものとし、比例係数を  $R$  とおく。

第  $i$  層に作用する第  $j$  層 ( $j = i \pm 1$ ) からの拘束力  $f_{ij}$  は単位面積あたり、

$$f_{ij} = -R(\Delta \epsilon_i - \Delta \epsilon_j) \dots\dots\dots (5.17)$$

で表わされる。ここに、 $\Delta \epsilon_i$ 、 $\Delta \epsilon_j$  はそれぞれ第  $i$  層、第  $j$  層の伸びを表わす量であり、 $f_{ij}$  は第  $i$  層を伸ばす向きに正である。 $R = 0$  は拘束がない場合、 $R = \infty$  は拘束が完全な場合(平面ひずみ)に相当する。

上の仮定のもとに第  $i$  層における軸方向応力のつり合いを考える。層間の拘束がない場合の第  $i$  層の塑性的な伸びを  $\epsilon_i$ 、層間の拘束のもとに実際に生じた伸びを  $\Delta \epsilon_i$  とすると、 $E(\epsilon_i - \Delta \epsilon_i)$  が層内に弾性的に貯えられた応力となるから、単位幅、単位長さで厚さ  $\Delta d$  の厚さを考えると、応力のつり合い(図 5・13 (b))より、

$$E(\epsilon_i - \Delta \epsilon_i) \Delta d + f_{i,i-1} + f_{i,i+1} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots) \dots\dots (5.18)$$

となる。ただし、 $f_{1,0} = 0$  である。(5.17) 式を代入すると、

$$\left. \begin{aligned} E(\epsilon_i - \Delta\epsilon_i) \Delta d - R(\Delta\epsilon_i - \Delta\epsilon_{i-1}) - R(\Delta\epsilon_i - \Delta\epsilon_{i+1}) &= 0 \\ (i = 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \dots (5.19)$$

表面層では,

$$E(\epsilon_1 - \Delta\epsilon_1) \Delta d - R(\Delta\epsilon_1 - \Delta\epsilon_2) = 0$$

となる。(5.19) 式は境界での軸方向の応力のつり合い条件を満たしているが、ひずみについては不連続が含まれている。ここで、 $R$  より次のように拘束係数  $\kappa$  を定める。

$$\kappa = \frac{R/E \cdot \Delta d}{1 + R/E \cdot \Delta d} \dots\dots\dots (5.20)$$

このとき、 $0 \leq \kappa \leq 1$  であり、

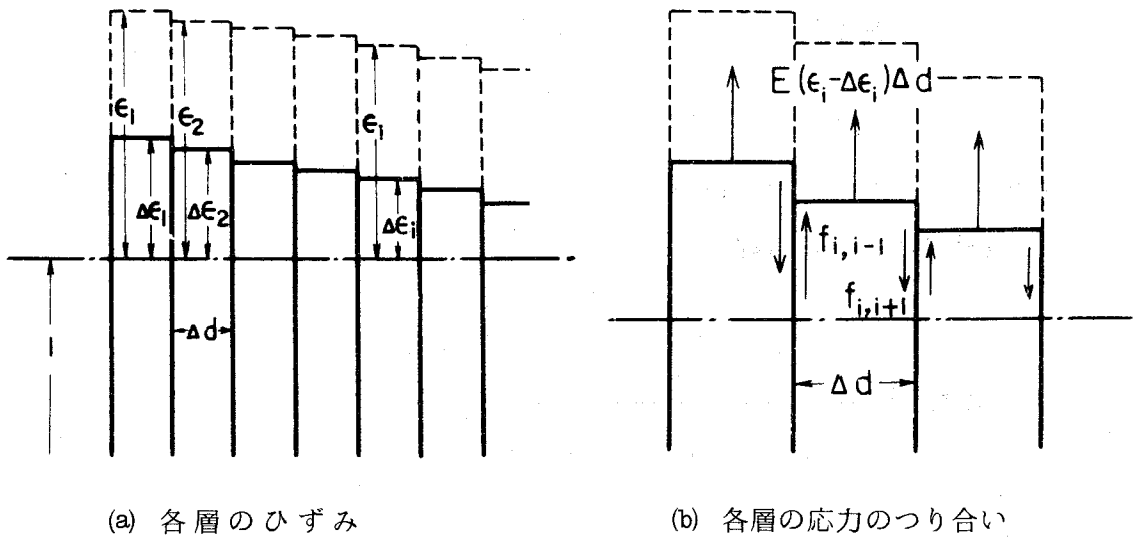


図 5.13 表面層の model

$$\left. \begin{array}{ll} \kappa = 0, & \text{拘束なし (応力解放)} \\ \kappa = 1, & \text{完全拘束 (ひずみ一定)} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (5.21)$$

に対応する。 $\kappa$ の値には弾性的な表面の拘束の解放，および塑性変形による解放（層間でのすべり）の両者が含まれる。すなわち，弾性変形では  $\kappa$  の値は 1 にきわめて近く，反対に層間での塑性的なすべりが多いときは  $\kappa$  は小さくなり，0 に近づく。

（5.19）式において第  $n$  層までを考え，この内第  $m$  層 ( $m < n$ ) までにおいて塑性のびが生じたとすると，次の連立方程式を得る。

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \varepsilon_1 - \kappa \Delta \varepsilon_2 = (1 - \kappa) \varepsilon_1 \\ -\kappa \Delta \varepsilon_{i-1} + (1 + \kappa) \Delta \varepsilon_i - \kappa \Delta \varepsilon_{i+1} = (1 - \kappa) \varepsilon_i \quad (i = 2, 3, \dots, m) \\ -\kappa \Delta \varepsilon_{j-1} + (1 + \kappa) \Delta \varepsilon_j - \kappa \Delta \varepsilon_{j+1} = 0 \quad (j = m + 1, \dots, n - 1) \\ -\kappa \Delta \varepsilon_{n-1} + (1 + \kappa) \Delta \varepsilon_n = \kappa \Delta \varepsilon_{n+1} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (5.22)$$

ここで計算の便宜上，

$$\mu = \kappa / (1 + \kappa) \quad (0 \leq \mu \leq \frac{1}{2}) \quad \dots\dots\dots (5.23)$$

とおくと，残留応力の問題を考える場合に実験結果と比較する上で重要となる表面層の伸び  $\Delta \varepsilon_1$  は次のように与えられる。

$$\Delta \varepsilon_1 = \frac{(1 - 2\mu) \sum_{k=1}^m \mu^{k-1} D_{n-k} \varepsilon_k + \mu^n \Delta \varepsilon_{n+1}}{D_n - \mu D_{n-1}} \dots\dots\dots (5.24)$$

ここに， $D_n$  は  $n$  行  $n$  列の行列式，

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -\mu & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\mu \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\mu & 1 \end{vmatrix} \cdots \cdots (5.25)$$

で、また、

$$\begin{aligned} D_n &= D_{n-1} - \mu^2 D_{n-2} \quad (n \geq 2) \\ \text{ただし, } D_0 &= 1, \quad D_1 = 1 \end{aligned} \quad \} \cdots \cdots (5.26)$$

である。したがって、試料表面の残留応力  $\sigma_{r1}$  は、

$$\sigma_{r1} = -E (\epsilon_1 - \Delta \epsilon_1) \cdots \cdots (5.27)$$

で与えられる。

$\kappa = 1$  のときは、(5.23) 式より  $\mu = \frac{1}{2}$  となり、 $n$  が大きい場合には(5.24) 式から  $\Delta \epsilon_1 = 0$  となり、残留応力は

$$\sigma_{r1} = -E \epsilon_1 \cdots \cdots (5.28)$$

となる。これは弾性論の結果と一致する。

また(5.24) 式において、 $n$  が十分大きく  $m \ll n$  の場合には、 $\mu \leq \frac{1}{2}$  であるから、分子の第2項は無視し得る。したがってこのとき、第1層のひずみ  $\Delta \epsilon_1$  は第  $k$  層のひずみ  $\epsilon_k$  から指数関数的に  $\mu^{k-1}$  倍された形で影響を受けることがわかる。すなわち拘束の影響はほぼ指数級数的に表示されることになり、これは西原・平<sup>(31)</sup>によって多結晶金属の降伏における表面効果について結晶粒相互の拘束から考察された際に用いられた表式と類似している。しかしながら、西原らの解析とここでのべた解析とは、(a) 前者が遠距離相互作用

用を考えているのに対し、ここでは隣接相互作用のみを考える点、(b) 前者では拘束による変形抵抗の差異が論じられているのに対し、ここでは主にひずみについて考えている点、において異なっている。

### 5・3・2・2・3 曲げ疲れにおける圧縮残留応力の減少

次に、両振り曲げ疲れにおける残留応力変化(図5・2)の減少過程に対して上の解析を適用する。まず各層の伸びの進行と表面残留応力の関係を見るために、簡単な例として表面の第1層があるひずみ $\epsilon_0$ だけ伸び、次に第2, 3, ..., m層まで順々に同じひずみ $\epsilon_0$ だけ伸びる場合を考える。このとき表面での残留応力 $\sigma_{r1}$ を(5・24)式より種々の $\kappa$ の値について求めると、図5・14(a)のようになる。(ただし、 $n=20$ とした。なお、図のたて軸は第m層まで伸びたときの表面層の残留応力 $\sigma_{r1}(m)$ の、第1層のみが伸びたときの値 $\sigma_{r1}(1)$ に対する比で示している。)

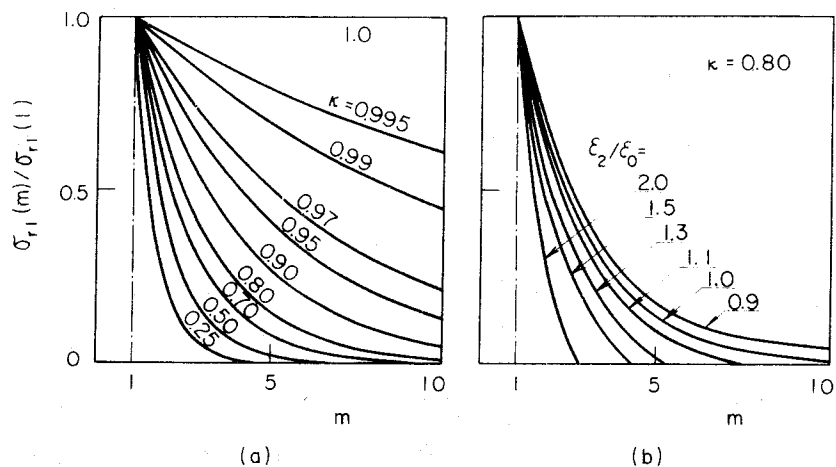


図5・14 層の伸びの内部への伝播による表面残留応力の変化( $n=20$ )

図 5・14 (a) からわかるように、伸びが表面から次第に内部に向かって生じていくとき、表面で測定している残留応力は次第に減少する。これはいいかえると、表面層とその内側の層との相対的な伸びの差が小さくなり、表面での圧縮残留応力の絶対値が減少したものである。また図 5・14 (a) からわかるように、拘束係数  $\kappa$  の値が小さくなるほど  $\sigma_{r1}$  の減少は急であるが、興味あるのは  $\kappa$  の値がひずみ一定の場合 ( $\kappa = 1$ ) からわずかに小さくなっただけで、 $\sigma_{r1}$  にかなりの減少が見られることである。

次に各層の伸びが一定でない場合の変化の傾向を見るために、図 5・14 (b) に第 2 層の伸び  $\epsilon_2$  のみが  $\epsilon_0$  と異なる場合を例にとり、 $\epsilon_2 / \epsilon_0$  の種々の値に対して残留応力の減少の傾向を示す。これからわかるように、表面残留応力は第 2 層の伸びが大きい場合には減少がより急激になる傾向がある。

次に応力繰返しの効果を考える。まず、応力の繰返しに伴って表面層は伸びるが、次第に加工硬化してある程度以上の変形を続けることが困難となり、さらに発生した圧縮残留応力が平均応力として働くと、表面層の変形の進行を妨げると考えられる。このような点を考慮し、X線回折線半価幅の変化の傾向（たとえば図 4・6）も考え合わせて、ここでは各層のひずみ（伸び）が繰返し数に対して指数関数的に変化すると仮定する。すなわち、

$$\epsilon_i / \epsilon_0 = 1 - \exp(-C_1^{(i-1)} (N - \bar{N}_0^{(i-1)})) \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 29)$$

ここに  $\bar{N}$  は応力の繰返し数を適当な単位で表示したものであり、 $C_1$  およ  $\bar{N}_0$  は定数である。一例として、 $C_1 = 1$ 、 $\bar{N}_0 = 0.2$  （すなわち各層の伸びの増加曲線の形は相似であるが、伸びの開始が試料内部の層へ行くにしたがって遅くなる場合、図 5・15 右上）、について、表面残留応力変化を求めた結果が図 5・15 である。（なおここで、 $n = 20$  とした。）

この結果は先に図 5・2 に示した実験結果の傾向と定性的によく一致している。ただし、実験結果の方が残留応力の減少は幾分急激であるが、これは X



線による残留応力の試料内部への分布の測定<sup>(18)</sup>から知られているように、第2層の残留応力のピーク値が表面第1層のそれにくらべて約1.6倍大きいことなどの原因によると考えられる(図5・14(b)参照)。

以上のべてきた解析を別の言葉で表現すると次のようになる。すなわち、疲れ過程中的応力繰返しによる残留応力の変化としては、二つの局面、すなわち疲れの進行に伴う表面層の伸びと応力繰返しの作用による表面近傍の各層間の拘束の緩和とがある。前者の伸びを層の内部で、後者の緩和を層の境界で起こるとして、その相関関係を表わしたものが拘束係数  $\kappa$  である。

ここで扱った焼きなまし材で初期残留応力がない場合には両者の作用が現われ、先の図5・2に示すような残留応力の peak が現われるが、他方初期に材料が大きな残留応力を持つ場合<sup>(8)</sup>には、後者の緩和作用の方が相対的に大きく働いて、初期残留応力は応力の繰返しとともに単調に減少する傾向を示すと考えられる。すなわち、このような考え方を導入することによって定性的にはあるが種々の変化を統一的に説明づけることができる。

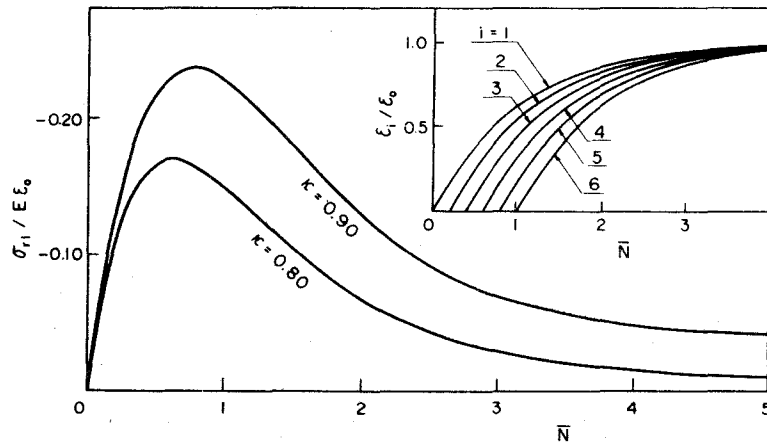


図5・15 表面層の不連続体的解析から  
予想される曲げ疲れにおける  
残留応力変化

負荷応力が疲れ限度以下の場合、初期にわずかの圧縮の残留応力が生じ、疲れ過程中ほぼ一定であること（図 5・2 一点鎖線）は、このような負荷応力の範囲では、表面層でのみ疲れがある程度進むが、内部へは進行しないことを意味していると考えられる。このような観点からすると、疲れ破壊は疲れが内部へ進行してはじめて起こると言える<sup>(30)</sup>。

〔また、図 5・5 に示すように、曲げ疲れ過程において、残留応力がピークをとる附近の繰返し数で応力振巾を増加させると、残留応力変化に新しいピークが生じるが、この現象も増加した負荷応力によって表面層に新たなすべりが生じ、表面層での伸びが再び一時的に増大すると考えると定性的に理解される。なお、上の model で考えた層の実際の厚さ（ $\Delta d$ ）としては、残留応力の問題に対しては当然 X 線侵入深さをとるべきであると考えられるが、他方層間のずれを実際に引きおこす要因としては、subgrain boundary などが大きな役割をはたしていると考えられる。疲れの場合、繰返し応力が作用することもあるが、伸び  $\epsilon_i$  が生じつつある層の境界では塑性的なすべりを生じ、 $\kappa$  の値が低いことが予想される。上の計算では全ての層で  $\kappa$  の値が等しいとしたが、これはいわば  $\kappa$  の平均値を考えていることに相当する。さらに、以上においては横隣りの層の拘束のみを考えたが、考えている現象が表面のごく近傍であるため上下方向の拘束は強くなく、伸びは容易に表面に抜けるものと考えられる。〕

#### 5・4 負荷応力変動に伴う残留応力変化の疲れ寿命への影響

##### 5・4・1 ま え が き

一般に、低応力の疲れにおいては、残留応力が疲れ寿命に影響することが知られている。ところで、材料に初期に与えられた残留応力が疲れ寿命に及ぼす影響については比較的多くの研究がなされているが、疲れ過程に発生する残留応力の影響についてはきわめて数が少ない<sup>(1)(32)</sup>。後者の現われるのは、おもに負荷応力が疲れ過程の途中で変化する場合であるが、それに

は代表的な二つの例，すなわち応力振幅が変化する場合，および平均応力が変動する場合が考えられる。

先にのべたように，疲れ過程に発生する残留応力変化の様子は，曲げ疲れとねじり疲れでは異なっている。したがって，残留応力の疲れ寿命への影響についても，両者を分けて考える必要がある。

負荷応力および残留応力が変化する場合の疲れ寿命を考えるための基礎式として，以下では Miner の式<sup>(33)</sup>

$$\sum_i (n_i / N_i) = 1 \quad \dots\dots\dots (5.30)$$

を用いる。(ここに  $n_i$  は寿命が  $N_i$  であるような一定応力  $\sigma_i$  での実際の繰返し数である。) (5.30) 式はよく知られているように疲れ被害 (damage) の直線的な進行を意味している。

疲れ被害の物理的な内容についてはあまり明瞭には知られていないが，たとえば S. S. Manson<sup>(34)</sup> はその内容として，

- (a) crack の長さ                      (b) crack の数
- (c) 金属組織的な変化                (d) 残留応力の変化

などをあげている。しかしながら現在のところ，負荷応力状態などの種々の要因がこれらの各々に対してどのように影響するのかは必ずしも明らかではない。また，実働応力下の疲れ寿命に関しては従来から種々の研究がなされているが，それらの多くは負荷応力の波形の影響が主として論じられており，残留応力にはあまり関心が払われていないようである。

ここでは議論を，(d) の残留応力変化の疲れ寿命への影響に限ることにし，先に X 線的に測定した残留応力変化を対象に，その寿命への影響について考える。(なお簡単のため，以下では残留応力以外の (a) ~ (c) の因子に対しては Miner の関係 (5.30) 式がそのまま成り立つものとする。)

#### 5・4・2 応力振幅変化の場合

応力振幅変動の場合の疲れ寿命に及ぼす残留応力の影響については、曲げ疲れにおける2段階増加応力の場合が平，村上<sup>(1)</sup>によって検討され，その結果寿命ののびの内，約30～50%が圧縮残留応力に起因していることが示されている。

そこで曲げ疲れと比較する意味で，2段階2重重複繰返し荷重下のねじり疲れにおけるD-R線図を求めた結果を図5・16に示す。（ここに，Rは一次応力の繰返し数比，Dは二次応力に対する破断までの繰返し数の減少率である<sup>(35)</sup>。）ここで一次および二次応力はそれぞれ $\tau_{a1} = 13.0 \text{ kg/mm}^2$

$\tau_{a2} = 15.0 \text{ kg/mm}^2$ とした。（なお図5・16の各点はそれぞれ2～5本の試験片による平均値で，同時に平均値のばらつきの範囲（標準誤差）も示している。）また比較のため，河本ら<sup>(36)</sup>によって

報告されている0.34% C炭素鋼の回転曲げ疲れの場合の実験結果（応力振幅 $1.06 \sigma_w \rightarrow 1.10 \sigma_w$ ）を図中に破線で示す。

図5・16からわかるように， $n_1 / N_1 = 0.2$ の近傍で曲げ疲れとねじり疲れの寿命は最も大きく異なっている。これはまた疲れ過程に生じる残留応力のピークをとる繰返し数付近でもあり（図5・2および図5・3），残留応力の影響

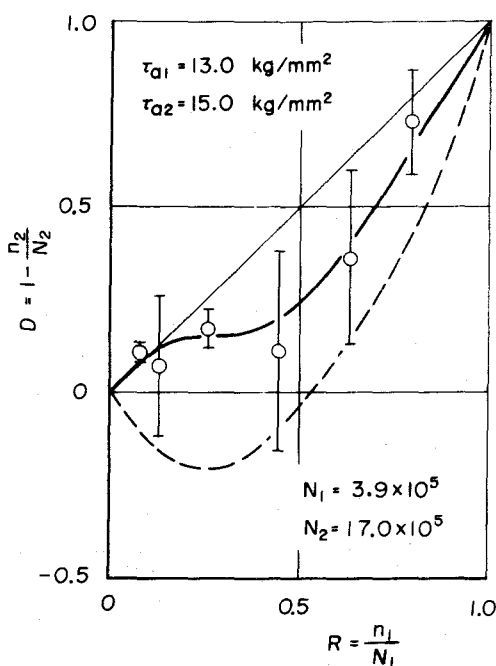


図5・16 ねじり疲れのD-R線図

を示していると考えられる。すなわち、ねじり疲れの場合は発生する残留応力の値も小さく、応力変動の影響をほとんど受けないことから、その寿命への影響も小さい。

#### 5・4・3 平均応力変動の場合

ここでは、残留応力の影響が最も顕著に現われると考えられる平均応力が矩形波状に変動する場合の曲げ疲れを例にとって検討する。先に求めた残留応力変化（図 5・7, 5・8）を考えに入れて Miner の式を修正すると、図 5・17 の実線のようになる。（なお、計算の詳細は付録 5・6・2 に示す。）図のたて軸は、残留応力変化を考慮して予測した寿命  $N$  と単純に Miner の説を適用したときの寿命  $N_M$  の比であり、横軸は平均応力変動の周期  $n_0$  である。計算結果は変動周期  $n_0$  の大きいときは  $N$  の値は  $N_M$  とほぼ一致するが、変動周期が小さくなるとこれよりも短くなる傾向があることを示している。図 5・17 中の○印は、別に疲れ試験により、平均応力を種々の変動周期  $n_0$  で変動させたときの寿命  $N$  を求め、同じく Miner による推

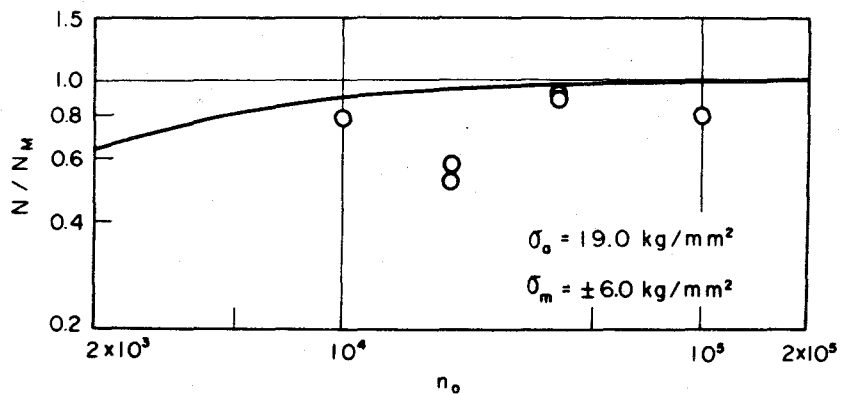


図 5・17 平均応力の変動周期と疲れ寿命の関係

定値  $N_M$  との比で示したものである。図からわかるように、実際の疲れ寿命は変動の回数が増すにつれて低下するが<sup>(37)</sup>、それは残留応力を考慮した予測値（実線）よりもさらに大きい。これは平均応力変動時の応力波形の影響など、残留応力以外の因子によるものと考えられる<sup>(37)</sup>。

図 5・18 は比較のために、ねじり疲れにおいて同じく平均応力が矩形波状に変動する場合の寿命を調べた結果であるが、ねじり疲れにおいては、平均応力が負荷されても、また負荷平均応力が変動しても、両振りの場合の疲れ寿命にほぼ一致する。これはねじり疲れにおいては、曲げ疲れとは異なって平均応力負荷に対応した残留応力の発生がないこと（図 4・21）と対応しており、この場合にも残留応力の影響による修正は考慮する必要がないことを示している。

以上のべた点をまとめると表 5・6 のようになるが、これからも疲れ過程における残留応力の発生の問題が平均応力の問題と互に関連していることがわかる。

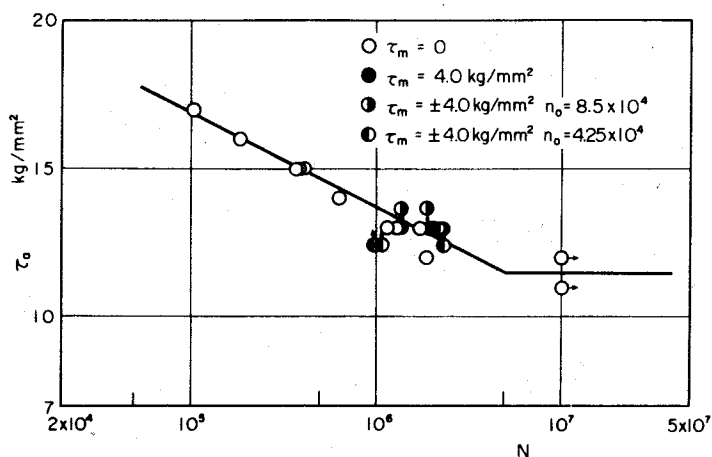


図 5・18 ねじり疲れの S-N 線図

表 5・6 疲れ寿命に影響を及ぼす因子

		曲 げ 疲 れ	ね じ り 疲 れ
負 荷 応 力	応 力 振 幅	○	○
	平 均 応 力	○	
疲れ過程に発生する残留応力		○	

## 5・5 結 言

焼きなまし材の疲れ過程に発生する残留応力の挙動をX線応力測定法を用いて追求するとともに、その変化の機構について考察を加え、またその疲れ寿命への影響についても検討した。それらをまとめると次のようになる。

- (1) 曲げおよびねじり疲れで、一定応力振幅および負荷応力（応力振幅，平均応力）が変動する場合について，試料表面各方向の残留応力変化を調べた。その結果，ねじり疲れでは初期に引張残留応力を生じ，その挙動は応力変動によって影響を受けないが，他方曲げ疲れの場合には負荷応力の変化によって敏感に影響される。たとえば平均応力が変動する場合，残留応力もそれに対応して変化する。
- (2) 一般に疲れの進行に対しては，せん断応力あるいはすべりが最も重要な役割をはたすと考えられるが，この点については曲げ疲れとねじり疲れで差異はない。したがって両者における残留応力の挙動の差異は，その他の副次的な要因，すなわち，すべり面のまわりの応力状態の違いにもとずくと考えられる。
- (3) 両振り曲げ疲れ過程における圧縮残留応力の発生は試料表面層が応力軸の方向に塑性的に伸びたことによる。表面層が伸びる原因としては，引張りの半サイクルと圧縮の半サイクルにおける微視的変形の非対称性によると考えられ，その原因としては原子空孔の発生と移動に対する静水圧応力成分の影響が考えられる。

(4) 試料を表面に平行な薄い層に分け、層間の相互の拘束を考えに入れた力学的 model を用いて、両振り曲げ疲れ過程における圧縮残留応力の減少過程について考察した。すなわち、表面での圧縮残留応力の減少は、疲れの表面から内部への進行に密接な関係があると考えられる。

(5) 疲れ過程に発生する残留応力の疲れ寿命への影響について検討を加えた曲げ疲れとねじり疲れでは残留応力の変化の傾向は異なっているため、その寿命への影響についても区別して考える必要がある。曲げ疲れにおいて、平均応力が矩形波状に正負に変動する場合には、残留応力を考慮した推定寿命は単純に Miner の仮説を適用した場合よりも短くなると予想されるが、これは実験結果の傾向と一致する。一方、ねじり疲れの場合は、疲れ過程に発生する残留応力の寿命への影響はほとんどない。

## 5・6 付 録

### 5・6・1 外部応力場の中での空孔の挙動

まず原子空孔の動きの物理的な過程についての基礎的な知識を整理しておく。次のようになる<sup>(38)</sup>。結晶格子に沿って原子空孔が動く速度  $v$  あるいは自己拡散係数  $D$  は、

$$v = a_0 / t, \quad D = a_0^2 / t \quad \dots\dots\dots (5.31)$$

で与えられる。ここに、 $a_0$  は格子定数の程度の値であり、 $t$  は拡散原子の平均の停止時間 (mean time of stay) である。エントロピー変化を無視するものとする、jump frequency  $1/t$  は近似的に次のように与えられる。

$$\frac{1}{t} = \nu_0 \alpha \exp \left( - \frac{U_d}{R T} \right) \quad \dots\dots\dots (5.32)$$



ここに、 $\nu_0$  は原子の振動数、 $\alpha$  は最近接原子数、 $k$  は Boltzman 定数、 $T$  は絶対温度である。vacancy mechanism による自己拡散に対する活性化エネルギー  $U_d$  は、空孔を形成するためのエネルギー  $U_f$  と、空孔の移動 (migration) のためのエネルギー  $U_m$  の和で与えられる。すなわち、

$$U_d = U_f + U_m \quad \dots\dots\dots (5.33)$$

ここで、以下の議論の便宜のため、空孔の形成の際の静水圧応力成分との interaction energy  $E_{pf}$  を、先の (5.12) 式のかわりにより簡単な次の形で表わすことにする。

$$E_{pf} = - p V_f \quad \dots\dots\dots (5.34)$$

ここに、 $V_f$  は空孔の形成の活性化体積 (activation volume) と呼ばれるものである。

同様の関係は、空孔の運動に際しての静水圧応力成分との interaction energy  $E_{pm}$  に関しても成立する。すなわち、

$$E_{pm} = - p V_m \quad \dots\dots\dots (5.35)$$

通常、空孔の移動に対する活性化体積  $V_m$  は  $V_f$  にくらべてかなり小さい (27)。

自己拡散に対する活性化体積  $V_d$  は  $V_d = V_f + V_m$  により与えられる。したがってまた、自己拡散過程の静水圧応力との interaction energy  $E_{pd}$  は

$$E_{pd} = - p V_d \quad \dots\dots\dots (5.36)$$

で表わされる。静水圧応力成分  $p$  が存在するときの自己拡散の活性化エネ

ルギー  $U_d(0)$  は (5.36) 式より,

$$U_d(p) = U_d(0) + E_{pd} = U_d(0) - pV_d \dots (5.37)$$

として与えられる。ここに,  $U_d(0)$  は 静水圧応力成分がない場合の活性化エネルギーである。(5.32) 式および (5.37) 式を (5.31) 式に代入することにより,

$$D(p) = D(0) \exp\left(-\frac{pV_d}{kT}\right) \dots (5.38)$$

が得られる ( $D(p)$ ,  $D(0)$  はそれぞれ静水圧応力成分  $p$  および  $0$  のときの拡散係数)。(5.38) 式の妥当性は静水圧下の金属のクリープ (39)–(41), あるいは静水圧下の拡散係数の測定 (27) において実験的にも確かめられている。

(なお, 本文中にのべた (5.13)–(5.16) 式の計算と同様に, 材料の変形速度  $\dot{\epsilon}$  が空孔の拡散係数  $D$  に比例すると仮定し, 代表的な値として  $V_d = 0.80 \Omega$ 。(40) を用い, 先の実験条件を代入すると, (5.38) 式から

$$\frac{\dot{\epsilon}(p_+)}{\dot{\epsilon}(p_-)} = \frac{D(p_+)}{D(p_-)} = \exp\left(\frac{(p_+ - p_-)V_d}{kT}\right) \cong 1.32$$

を得る。) (5.39)

ただしここで, 上の (5.38) 式は過剰な空孔の濃度  $C$  が比較的小さいこと, いいかえると熱的な拡散機構を仮定していることに注意する必要がある。これに対して, 材料中に塑性変形によって多量の過剰原子空孔が作り出される場合には, より一般的に拡散係数は次のように書き直す必要がある (42)。

$$D = D_0 \left( C_0 \exp \left( -\frac{U_f}{kT} \right) + C \right) \exp \left( -\frac{U_m}{kT} \right) \dots \dots (5.40)$$

ここに、 $D_0$  および  $C_0$  は定数である。塑性変形に対しては  $C$  は一般に (5.6) 式で与えられる。材料中に数多くの空孔が作られる場合や温度が比較的低い場合、すなわち  $C \gg C_0 \exp(-U_f/kT)$  なる時には拡散係数は近似的に、

$$D = D_0 C \exp \left( -\frac{U_m}{kT} \right) \dots \dots \dots (5.41)$$

で与えられる<sup>(42)~(43)</sup>。(5.35)式を代入すると、(5.38)式に対応して、

$$D(p) = D(0) \frac{C(p)}{C(0)} \exp \left( -\frac{pV_m}{kT} \right)$$

の関係がある。これが先の(5.13)式である。

#### 5.6.2 平均応力が変動する場合の残留応力を考慮した疲れ寿命

まず疲れ試験の結果得られた、両振りおよび平均応力負荷の場合の  $S-N$  曲線を図 5.19 に示す。山田ら<sup>(37)</sup>によれば、平均応力  $\sigma_m$  と平均応力が負荷されたときの寿命  $N_m$  との間には、

$$N_m = N_0 \exp \left( -\frac{\sigma_m}{\sigma_0} \right) \dots \dots \dots (5.42)$$

の関係がある。ここに  $N_0$  は両振り ( $\sigma_m = 0$ ) での疲れ寿命、 $\sigma_0$

は応力の次元を持つ正の定数である。

平均応力が変動する場合の疲れ寿命は Miner の仮説を適用すると、平

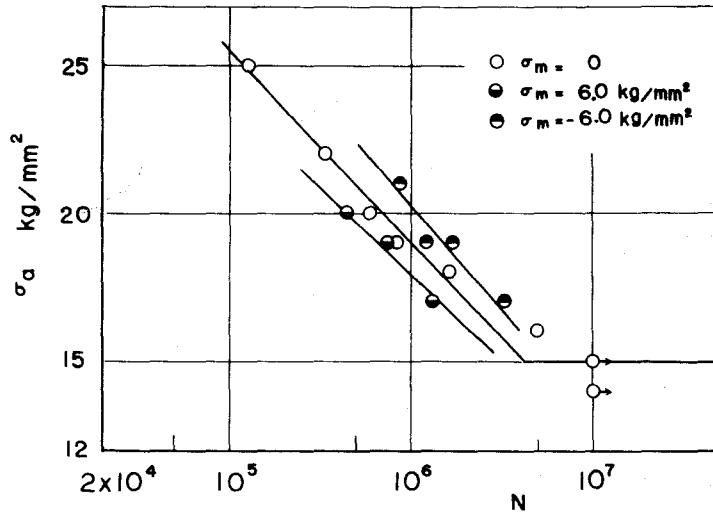


図 5・19 板曲げ疲れの S-N 線図

均応力  $\sigma_{mi}$  が負荷されたときの寿命を  $N_i$  ,  $\sigma_{mi}$  のもとでの実際の応力繰返し数を  $n_i$  としたとき, (5・30) 式で与えられる。さらに, 平均応力  $\sigma_{mi}$  のほかに残留応力が加わった場合の寿命を  $N'_i$  とすると (5・30) 式は,

$$\sum_i \int_0^{n_i} \frac{dn}{N'_i} = 1 \quad \dots\dots\dots (5.43)$$

となる。絶対値の等しい正負の平均応力が交互に繰返され, 各区間での応力繰返し数  $n_i$  がすべて  $n_0$  に等しいときは, 変動の回数を  $2m_0$  とすれば, (5・43) 式は,

$$m_0 \int_0^{n_0} \left( \frac{1}{N'_1} + \frac{1}{N'_2} \right) dn = 1 \quad \dots\dots\dots (5.44)$$

となる。(ただし, 一番最初には残留応力はまだ発生していないが,  $m_0$  の大なる場合を考えてこの影響を無視し, また, 同一の平均応力の各区間での残

留応力変化は等しいとする。)したがって、(5・44) 式より残留応力を考慮した寿命  $N$  は、

$$N = 2 m_0 n_0 = \frac{2 n_0}{\int_0^{n_0} \left( \frac{1}{N'_1} + \frac{1}{N'_2} \right) d n} \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 45)$$

で与えられる。

ここで以下の議論にあたり次の仮定をおく。

- (1) 負荷応力変動は残留応力変化がほぼ定常になった後起こるものとする。  
すなわち、 $n_0$  は残留応力変化に要する繰返し数以上の大きさを持ち、  
(5・2) 式の関係が成り立つものとする。
- (2) 発生した残留応力は平均応力として作用する。
- (3) 平均応力として作用し、寿命に影響する残留応力としては、平均応力が変動しない場合の残留応力を基準にとったときの余分な残留応力  $\sigma_B$  をとる。

したがって、これらの仮定から、平均応力はみかけ上  $(\sigma_m + \sigma_s)$  の形で作用するとみなすことができるから、(5・42) 式を用いると、

$$\left. \begin{aligned} N'_1 &= N_0 \exp \left( -\frac{\sigma_{m1} + \sigma_{s1}}{\sigma_0} \right) = N_1 \exp \left( -\frac{\sigma_{s1}}{\sigma_0} \right) \\ N'_2 &= N_0 \exp \left( -\frac{\sigma_{m2} + \sigma_{s2}}{\sigma_0} \right) = N_2 \exp \left( -\frac{\sigma_{s2}}{\sigma_0} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5 \cdot 46)$$

となる。図 5・8 あるいは 図 5・10 に示したように、残留応力の変化は引張側と圧縮側でやや異なるが、近似的に  $\sigma_{s1} \cong -\sigma_{s2}$  とみなすことができるから、

$$N'_1 N'_2 = N_1 N_2 \exp \left( -\frac{\sigma_{s1} + \sigma_{s2}}{\sigma_B} \right) \cong N_1 N_2 \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 47)$$

となる。したがって(5.45)式は,

$$N = \frac{2 N_1 N_2 n_0}{\int_0^{n_0} (N'_1 + N'_2) dn} = N_M \frac{n_0}{n_0 + L} \dots\dots (5.48)$$

となる。ただしここに,

$$N_M = \frac{2 N_1 N_2}{N_1 + N_2} \dots\dots\dots (5.49)$$

$$L \equiv \frac{1}{N_1 + N_2} \int_0^{n_0} \{ (N'_1 - N_1) + (N'_2 - N_2) \} dn \quad (5.50)$$

であり,  $N_M$  は残留応力の影響を考えずに単純に Miner の説を適用したときの推定寿命である。

$L$  の値は(5.5), (5.42), (5.46), (5.50) 式より

$$L = \frac{1}{N_1 + N_2} \int_0^{n_0} \left\{ N_1 (e^{-\lambda e^{-x_1 n}} - 1) + N_2 (e^{\lambda e^{-x_2 n}} - 1) \right\} dn$$

$$\cong \frac{1}{N_1 + N_2} \left\{ \frac{N_1}{x_1} f(-\lambda) + \frac{N_2}{x_2} f(\lambda) - g(n_0) \right\} \dots\dots (5.51)$$

ただし,

$$\lambda = \frac{2 \sigma_{m0}}{\sigma_0} \geq 0, \quad f(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k \cdot k!} \dots\dots (5.52)$$

$$g(n_0) = \frac{N_1}{x_1} f(-\lambda e^{-\lambda_1 n_0}) + \frac{N_2}{x_2} f(\lambda e^{-\lambda_2 n_0}) \dots (5.53)$$

となる。 $n_0$  の値が大きい場合には、 $e^{-\lambda n_0} \ll 1$  であり、したがって  $g(n_0) \ll 1$  となるから、結局、

$$L \cong \frac{1}{N_1 + N_2} \left\{ \frac{N_1}{x_1} f(-\lambda) + \frac{N_2}{x_2} f(\lambda) \right\} > 0 \dots (5.54)$$

となる。すなわち、 $L$  は平均応力および応力振巾の大きさ、あるいは材料の性質によって定まる定数である。 $L$  が求まれば寿命は (5.48) 式で与えられる。

さて、一例として先の実験条件、 $\sigma_a = 19.0 \text{ Kg/mm}^2$ 、 $\sigma_m = \pm 6.0 \text{ Kg/mm}^2$  の場合について、以上の解析を数値的に検討してみる。図 5.19 より  $N_0 = 10.0 \times 10^5$ 、 $N_1 = 6.6 \times 10^5$ 、 $N_2 = 15.2 \times 10^5$  であるから、(5.42) 式に代入して、 $\sigma_0 = 14.3 \text{ Kg/mm}^2$  となる。また、 $\sigma_{m0} = 6.0 \text{ Kg/mm}^2$  であるから、(5.52) 式より、 $\lambda = 0.84$ 、 $f(\lambda) = 1.06$ 、 $f(\lambda) = -0.69$ 。さらに図 5.10 より、 $x_1 = 5.9 \times 10^{-4}$ 、 $x_2 = 4.7 \times 10^{-4}$  であり、したがって、(5.54) 式より  $L$  の値は、

$$L = 0.12 \times 10^4 \dots (5.55)$$

となる。先の図 5.17 の実線はこの結果を図示したものである。

## 文 献

- (1) 平, 村上, 材料試験, 9 (昭 35), 372.
- (2) 平, 本田, 松木, 機械学会論文集 28-194 (昭 37), 1335.
- (3) 平, 本田, 山内, 機械学会論文集 29-203 (昭 38), 1181.
- (4) 西原, 遠藤, 機械学会論文集, 17-61 (昭 26), 146.
- (5) たとえば, 材料学会編, "X線応力測定法" (昭 41), 養賢堂.
- (6) 青山, 並川, 吉川, 材料学会第 14 期総会前刷, (1965), 25.
- (7) 会田, 小田, 中島, 機械学会論文集, 32-233 (昭 41), 137  
会田, 小田, 松尾, 全上, 32-233 (昭 41), 143.
- (8) 西原, 平, 機械学会論文集, 14-48 (昭 23), 107.
- (9) A.H. Cottrell, "Monograph and Report Series, No. 23,"  
(1958), 1, Inst. of Metals.
- (10) E. Roberts and W. K. Honeycombe, Phil. Mag., 5 (1960),  
1147.
- (11) R. W. Davidge, C. E. Silverstone and P. L. Pratt, Phil.  
Mag., 4, (1959), 985.
- (12) G. M. Sinclair, ASTM, Proceedings, 52 (1952), 743.
- (13) H. G. Van Bueren, Acta Met., 3 (1955), 519.
- (14) A. H. Cottrell, "Vacancies and Other Point Defects in  
Metals and Alloys", (1958), 1, Inst of Metals (London)
- (15) B. Russell and P. Vela, Phil. Mag., 8 (1963), 677.
- (16) R. E. Smallman, "Modern Physical Metallurgy", (1962),  
266, Butterworth.
- (17) 藤田, "転位論の金属学への応用", 日本金属学会編, (昭 32), 191, 丸善.
- (18) S. Taira and K. Hayashi, Proc. 9th Jap. Cong. Test. Mat.,  
(1966), 1.



- (19) W. A. Wood et al, Trans. AIME, 230 (1964), 511.
- (20) 平, 長尾ほか, 材料学会 第15期総会講演会前刷, (昭41), 9.
- (21) D. S. Kemsley and M. S. Paterson, Acta Met., 8 (1960), 453.
- (22) J. Friedel, "Dislocations", (1964), Pergamon;  
鈴木, "転位論入門", (昭42), アグネ.
- (23) J. E. Eshelby, Phil. Trans., 244 (1951), 87.
- (24) G. Sines et al, Proc. Int. Conf. on Crystal Lattice Defects., Supplement III, Japan Phys. Soc. (1963), 30.
- (25) F. R. N. Nabarro, "Report on Conf. on Strength of Solids", Phys. Soc., London, (1948), 75.
- (26) J. Weertman, J. Appl. Phys., 26 (1955), 1213; ibid. 28 (1957), 196.
- (27) R. P. Huebener, "Lattice Defects in Quenched Metals", Ed. by R. M. J. Cotterill et al, (1965), 569, Academic Press.
- (28) 辛島, 及川, 小倉, 日本金属学会誌, 31 (1967), 674.
- (29) 石橋, 材料, 13 (昭39), 577.
- (30) 石橋, 機械学会論文集, 29-206, 1693 (昭38); 32-235, 379 (昭41); 32-242, 1451 (昭41).
- (31) T. Nishihara and S. Taira, Memoirs Faculty Engg., Kyoto Univ., 12 (1950), 90.
- (32) 平, 林, 材料, 12 (昭38), 894.
- (33) M. A. Miner, J. Appl. Mech., 12 (1945), A-159.
- (34) S. S. Manson, Experimental Mechanics, (July 1965), 2.

- (35) たとえば, "実働荷重における疲労に関するシンポジウム" 前刷,  
材料学会, (昭 42),
- (36) 河本, 中川, 材料試験, 8 (昭 34), 405.
- (37) 山田, 北川, 小長, 材料, 13 (1964), 270.; 山田, 北川, 材料,  
17 (1968), 116.
- (38) G. Schoeck, "Mechanical Behavior of Materials at Elevated Temperatures," Ed. by J. E. Dorn, (1961), 79,  
McGraw - Hill.
- (39) R. W. Christy, Acta Met., 2 (1954), 284.
- (40) B. M. Butcher and A. L. Ruoff, J. Appl. Phys., 32  
(1961), 2036.
- (41) K. L. DeVries, et al, J. Appl. phys., 34 (1963),  
2254; 2258.
- (42) G. F. Bolling, Phil. Mag., 4 (1959), 537.
- (43) N. F. Mott, Phil. Mag., 43 (1952), 1151.
- (44) F. Seitz, Adv. Phys., 1 (1952), 43.

## 第 6 章 平均応力下の疲れ破壊機構の考察

### 6・1 緒 言

先の第 4 章において、引張り平均応力下では疲れの進行が速くなる傾向があり、特に顕微鏡的 crack の成長速度にはその影響が顕著であることをのべた(図 4・13)。ところで、一般に疲れの進行に対する平均応力の影響としては次の二つが考えられる。

(a) 疲れ過程中的の微視的変形に対する影響

(b) 疲れ crack の発生および成長に対する影響

これらの内、(a)については先の第 5 章において、残留応力の発生と関連してエネルギー的な検討を加え、引張り平均応力下では疲れの微視的変形が圧縮応力下にくらべて速く進むこと、およびこれに対して原子空孔の移動に対する静水圧応力成分の影響が考えられることをのべた。

しかしながら第 4 章でものべたように、平均応力の影響度として見た場合 (b)の方が大きい傾向にある。そこで本章では、(b)の crack に対する平均応力の影響について検討するとともに、前章までにのべてきた諸点を考慮しながら、疲れの問題に対してエネルギー的な観点から統一的な考察を加える。

平均応力がある場合の疲れ crack の成長速度については最近いくつかの実験結果も報告されているが<sup>(1)-(5)</sup>、それらは一般的に書くと、

$$\frac{d l}{d N} = f n (\sigma_a, \sigma_m, l) \quad \dots\dots\dots (6 \cdot 1)$$

と表わせる(ここに  $l$  に crack 長さ、 $N$  は繰返し数、 $\sigma_a$ 、 $\sigma_m$  はそれぞれ応力振幅、平均応力である)。平均応力  $\sigma_m$  の影響の程度は材料によっても当然異なると考えられるが、一般にはかなりの影響が認められている<sup>(1)-(5)</sup>。

しかしながら、疲れ強さに対する平均応力の影響がどのような微視的な要因によって生じるのか、またはそれが疲れ機構あるいは crack の成長とどのように関連しているのかという点については従来あまり検討されていない。

第4章においてものべたように、疲れ強さあるいは疲れ寿命を論じる場合疲れ crack の挙動を知ることは非常に重要であり、先にのべたように、Mansonによっても疲れ被害の内容の第1にあげられている(5・4節)。

ところで、現在までに行われて来た crack の発生、成長の議論は大きく分けて次の二つの傾向に分かれているようである。その一つは、弾性論に基づいた crack に関する議論であって、これには応力という観点は取入れられているが、crack 成長の物理的な機構が考えられていない欠点がある。第2は、微視的な立場からの crack についての議論で、この場合転位の動きや相互作用などの物理過程は、転位論や電子顕微鏡による観察などによってかなりはっきりしたものとなるが、他方応力状態についての知識は不十分である。これら二つの面で完全な crack の理論を作ることは、疲れの多様性もあって現在の段階では困難である。しかしながら、応力の観点および機構の観点の両者を含むエネルギー的な考え方を疲れの微視的な crack に適用することによって、定性的に平均応力の影響あるいは多様な疲れの特性を説明づけ、相互の関連を理解することができると予想される。

本章ではこのような立場から疲れ破壊機構のエネルギー的な考察を行う。すなわち、まず crack に関する種々のエネルギーを求め、次にそれらを用いて crack の成長を考え、さらに平均応力の役割について考察を加える。(なお以下では、crack という名称を表面の intrusion<sup>(6)</sup> なども含めた広い意味のき裂を表わすものとして用いる。弾性論の立場からすると、第5章で述べた原子空孔も crack の一種と見るができるわけで、以下の考察は当然先の原子空孔についての議論とも関連を持っている。)

## 6・2 crack のエネルギー

一般に、破壊の問題で crack をエネルギー的に扱う際に、 crack の成長速度が速い場合や常圧下での破壊などに対しては、 crack の持つエネルギーの中で、 crack と周囲の応力場との相互作用を無視することができると考えられている<sup>(7)</sup>。しかしながら、疲れ破壊のように crack の成長過程が比較的遅い場合や、高圧力の下での破壊などに対しては、この相互作用を考慮に入れる必要があると考えられる。Dower<sup>(8)</sup> は高圧下におけるぜい性破壊の crack 形成に対してエネルギー的な観点から考察を行っているが、ここでは同様な考え方を疲れの場合に適用する。

本節ではまず、 crack の持つエネルギーおよび crack 形成に際して外部から供給されるエネルギーについて考える。ここで、疲れ破壊の転位論的な model として、図 6・1 に示すような正負の刃状転位の合体による crack を代表的に選んで考える

ものとする(この model

を選ぶことの妥当性につ

いては、後に 6・5・1 節で

検討する)。このような

機構による疲れ crack の

発生は、藤田<sup>(9)</sup>によって最

初提案され、その後 crack

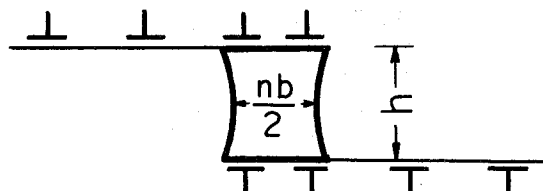


図 6・1 平行な正負の刃状転位の合体  
による疲れ crack の model

の成長に対しても同様に正負の転位の流入を考えた model が用いられている。<sup>(10)-(13)</sup>

### 6・2・1 crack 自身のエネルギーおよび crack と

#### 応力場の相互作用エネルギー

一般に crack の持つエネルギー  $E_c$  は以下に述べる四つの成分、すなわち crack の応力場の弾性エネルギー  $E_1$ 、表面エネルギー  $E_2$ 、外部応力場との相互作用エネルギー  $E_3$ 、 crack による体積増加エネルギー  $E_4$ 、からなっている。

いる<sup>(8)</sup>。

$$E_c = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 \quad \dots\dots\dots (6 \cdot 2)$$

(なお、ここでは2次元的な単位厚さの crack を考えるが、以下の議論は3次元的な円板形の crack の場合にも、係数がやや異なるだけで同様に当てはまる<sup>(8)</sup>。)

6・2・1・1 crack によって生ずる応力場の弾性

エネルギー:  $E_1$

図6・1に示すような正負の転位が作る crack に対する応力場はまだ正確には求められていないが、今近似的にこれを刃状転位の dipole と相似のものであると考えて解析を進める。

平行な互に逆の符号の刃状転位 (dipole) の場合、転位2本についてのエネルギーは、

$$E_d = \frac{G b^2}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \ln \frac{r_d}{b_0} - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right\} \quad \dots\dots\dots (6 \cdot 3)$$

で与えられる<sup>(14)</sup>。ここに、 $G$ は剛性率、 $\nu$ は Poisson 比、 $b$ は Burgers vector,  $b_0$ は転位芯の半径で  $10^{-8}$  cm 程度の値である。また  $r_d$ は2本転位間の距離、 $\theta$ は2つの転位を結ぶ方向と Burgers vector のなす角である。

さて図6・1の crack の応力場については、まず空隙が出来る前の状態を考え、転位の配置のみが図6・2のようになっているものとし、上下各  $n/2$  個の刃状転位が含まれているものとする、(6・3)式で  $r_d = h$ ,  $\theta = \pi/2$ とおいて、

$$E_1^{(1)} \cong \frac{G n^2 b^2}{8\pi(1-\nu)} \left( \ln \frac{h}{b_0} + \frac{1}{2} \right) \quad \dots\dots\dots (6 \cdot 4)$$

次に図 6・2 の状態から図 6・1 に示すような空隙が出来る場合を考えると、(6・4) 式の弾性ひずみを有する領域の最小半径  $b_0$  を  $nb/2$  とおくことによって、

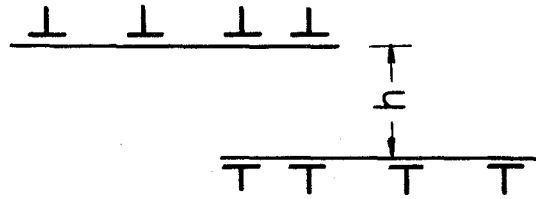


図 6・2 crack の核の発生直前の転位の配置 (仮想的)

$$E_1^{(2)} \cong \frac{G n^2 b^2}{8\pi(1-\nu)} \left( \ln \frac{2h}{nb} + \frac{1}{2} \right) \dots\dots\dots (6 \cdot 5)$$

と近似的に書くことができる。

(6・5) 式は  $nb/2 \leq h$  の場合を考えているが、逆に crack が転位の流入により成長して横長になり、図 6・3 に示すように  $nb/2 > h$  となった場合には、(6・5) 式の  $nb/2$  と  $h$  とを入れ変えて、

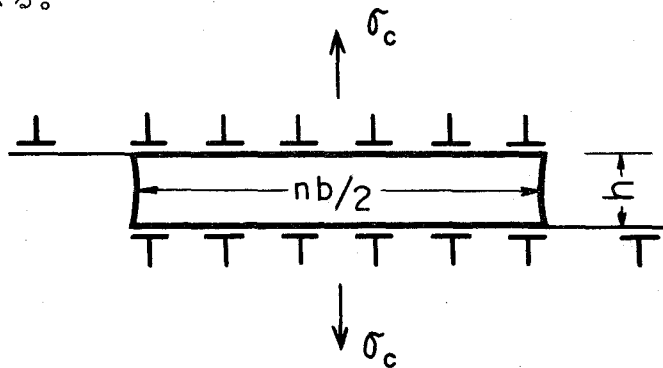


図 6・3 成長が進んだ段階の転位論的な crack

$$E_1^{(3)} \cong \frac{G h^2}{2\pi(1-\nu)} \left( \ln \frac{nb}{2h} + \frac{1}{2} \right) \dots\dots\dots (6 \cdot 6)$$

と表わすことができる。(なお、一般には crack の形状も複雑になると考えられるが、その場合には図 6・1 あるいは図 6・3 の  $h$  は crack の平均的な厚さを表わすものとする。)

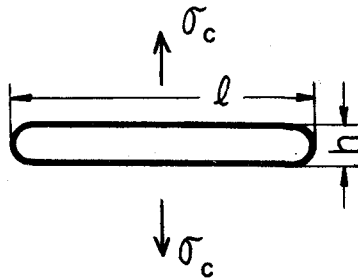


図 6・4 半巨視的な疲れ crack の model

なお、後にのべるように、図 6・3 crack が成長して連続体的な性格を示すようになった段階（半巨視的段階）に対応して、図 6・4 のような crack の model を考えることにする。

#### 6・2・1・2 crack の表面エネルギー： $E_2$

crack の単位面積あたりの有効な表面エネルギーを  $\gamma'$  とし、crack の表面の長さを  $S$  とすると、crack の表面エネルギーは

$$E_2 = S \gamma' \quad \dots\dots\dots (6 \cdot 7)$$

で与えられる。 $\gamma'$  は crack の伝播が弾性的でなく、その前方で塑性変形を伴うことを考慮したもので、塑性仕事を  $\omega$ 、純粋の表面エネルギーを  $\gamma$  とすると、 $\gamma' = \gamma + \omega$  で与えられる<sup>(8)(15)</sup>。（なお、図 6・1 あるいは図 6・3 の crack では  $S \cong 2h + nb$ 、図 6・4 では  $S' = 2(l + h)$  となる。） $\gamma$  の値は crack の出来る結晶面によって異なり、また雰囲気の影響を受ける。

#### 6・2・1・3 外力の場合における crack の弾性エネルギー： $E_3$

これは crack があることによって弾性エネルギーが解放されることによる項で、crack の長さを  $l$  とすると、

$$E_3 = \frac{-\pi \ominus \sigma_c^2 l^2}{8 G} \quad \dots\dots\dots (6 \cdot 8)$$

で与えられる<sup>(16)</sup>。ここに、 $\sigma_c$  は crack に垂直な方向の垂直応力である。



$\Theta$ は定数で、crackの形状により幾分異なるが、 $\Theta = \nu$ 程度の値を持っている<sup>(16) - (18)</sup>。(6・8)式の形からわかるように、 $E_3$ は応力 $\sigma_c$ の符号には依存しない。(なお、図6・1のcrackでは $l \cong nb/2$ である。)

#### 6・2・1・4 crackが拡大するときの体積の増加

によるエネルギー： $E_4$

一般に主応力を $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ とし、材料中の体積 $V_c$ のcrackがひずみ $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ だけ形を変えた場合を考える。簡単のため応力の主軸とひずみの主軸が一致するものと仮定すると、外力がcrackを拡げるときの体積の増加に対してなす仕事 $E_4$ は、

$$\begin{aligned} E_4 &= -(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) V_c \\ &= -p \varepsilon V_c - (\sigma'_1 \varepsilon'_1 + \sigma'_2 \varepsilon'_2 + \sigma'_3 \varepsilon'_3) V_c \\ &\dots\dots\dots (6 \cdot 9) \end{aligned}$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_i &= \sigma_i - p, \quad p = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3 \\ \varepsilon'_i &= \varepsilon_i - \varepsilon / 3, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ &\quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6 \cdot 10)$$

したがって、crackが応力軸方向にのみ体積を増す場合には $E_4 = -\sigma V_c$ 、一方応力軸と直角方向(crackの進展方向)にのみ体積を増す場合には $E_4 = 0$ 、またいずれの方向にも一様に体積を増す場合には $E_4 = -p V_c$ となる。

疲れの場合、crackがいずれかの一方向にのみ成長するとcrackが再び閉じてしまう可能性があり、crackの成長は等方的に近いと考えられる

から、近似的に

$$E_4 \cong -pV_c \quad \dots\dots\dots (6 \cdot 11)$$

と書ける。(なお、図 6・1 の crack では  $V_c \cong nbh/2$  , 図 6・4 では  $V_c' \cong hl$  となる。)

## 6・2・2 外部から供給されるエネルギー

疲れの微視的な crack の発生および成長を考える上で重要な点は、外部から供給されるエネルギーを考慮する必要がある点である。外部から与えられるエネルギー  $W_c$  は、転位の運動エネルギーを無視すれば次の 2 つの項、すなわち crack 形成前に転位が持つひずみエネルギー  $W_1$  と、外力が crack を作る際に転位になす仕事  $W_2$  , からなると考えられる。

$$W_c = W_1 + W_2 \quad \dots\dots\dots (6 \cdot 12)$$

### 6・2・2・1 転位の持つひずみエネルギー : $W_1$

一般に、刃状転位のエネルギーは単位長さあたり、

$$E_e = \frac{G b^2}{4\pi(1-\nu)} \ln \frac{r_1}{b_0} \quad \dots\dots\dots (6 \cdot 13)$$

で与えられる<sup>(19)</sup>。  $r_1$  は 弾性ひずみの到達距離 (半径) で、  $10^{-4}$  cm 程度の値である<sup>(19)</sup>。

図 6・1 の model では  $n$  個の転位が crack を形成するが、これらの転位は crack 形成以前から材料中に存在したものである。そのときの転位の持つエネルギーは (6・13) 式より、

$$W_1 = nE_e = \frac{nGb^2}{4\pi(1-\nu)} \ln \frac{r_1}{b_0} \quad \dots\dots\dots (6 \cdot 14)$$

図 6・4 の半巨視的 crack の場合には後に述べるように、 crack 先端

において subgrain boundary など転位密度の最も高い部分を考え、crack が  $x$  だけ進展したとき解放されるひずみエネルギーを  $W_1(x)$ 、それに対する転位の長さ(密度)を  $\rho_c(x)$  とすると、

$$W_1'(x) = \frac{\rho_c(x) G b^2}{4\pi(1-\nu)} \ln \frac{r_1'}{b_0} \dots\dots\dots (6 \cdot 15)$$

(ここに  $r_1'$  は、転位密度が大きい場合に、転位のひずみ場が相互に干渉し合うことを考慮したときの平均的なひずみの到達距離であって、 $r_1' \leq r_1$  である。)

6・2・2・2 外力が転位の移動に対してなす仕事： $W_2$

転位に働く力  $f$  はすべり面上のせん断応力を  $\tau$  とすると  $f = \tau b$  で与えられる。今、図 6・1 のような  $n$  個の転位を含む crack を作るに際して、 $n'$  個 ( $n' \geq n$ ) の転位がせん断応力  $\tau$  を受けながら転位線に垂直な方向に平均距離  $s$  だけ移動したとする。また、一般に転位の移動に対して働くまきつ力を  $\tau_0$  とすると、 $(\tau - \tau_0)$  の力が crack を作るために余分に費されたことになる。したがって、外力が crack を作る際の転位の移動に対してなした仕事  $W_2$  は、

$$W_2 = n' (\tau - \tau_0) b s \dots\dots\dots (6 \cdot 16)$$

で与えられる。(なお、 $W_2$  は図 6・1 の crack の核の発生に際して転位の pile up が重要な役割をはたすときには考慮する必要があるが<sup>(9)</sup>、一般に crack が成長するにつれて相対的にその役割を減ずると考えられる。)

以上 (6・4) ~ (6・11), (6・14) ~ (6・16) 式において、crack のエネルギーの各々について述べたが、これらの項の中には力学的条件のみによって決まる項と材料の性質が関係する項とがある。

### 6・3 crack の成長

crack の成長過程は、上に述べたエネルギーの各項目の中のいずれが重要であるかによっては、三つの段階、すなわち核の発生、転位論的成長過程、および半巨視的成長過程に分けて検討する必要があると考えられる。(なおここではまず一軸応力状態を考えるものとする。)

#### 6・3・1 crack の核の発生の過程

crack の核が出来るためには、まず  $W_c$  によってエネルギーを供給された  $n$  個の転位が、図 6・2 のよう正負の密集した配置をとる必要がある。このときの条件を考えると、まず (6・12)(6・14)(6・16) 式より

$$W_c = \frac{G n b^2}{4\pi(1-\nu)} \ln \frac{r_1}{b_0} + n'(\tau - \tau_0) b s \quad \dots\dots\dots (6 \cdot 17)$$

また (6・4) 式より、

$$E_c^{(1)} = E_1^{(1)} \cong \frac{G n^2 b^2}{8\pi(1-\nu)} \left( \ln \frac{h}{b_0} + \frac{1}{2} \right) \quad \dots\dots\dots (6 \cdot 18)$$

であるとき、

$$W_c - E_c^{(1)} = n'(\tau - \tau_0) b s + \frac{G n b^2}{8\pi(1-\nu)} \left[ \ln \left\{ \left( \frac{r_1}{b_0} \right)^2 / \left( \frac{h}{b_0} \right)^n \right\} - \frac{1}{2} \right] > 0 \quad \dots\dots\dots (6 \cdot 19)$$

でなければならない。(なお、crack が未だ作られていないときを考えているので、(6・18)式で  $E_c$  としては  $E_1$  の項だけをとった。)

次に、このような配置をとった転位の中心に図 6・1 のように crack (空隙) が生じた場合を考える。この段階では未だ crack 先端の塑性変形は小さいと考えられるから  $\omega \cong 0$  とおくと、(6・3)、(6・5)、(6・7)、(6・8)、(6・11) 式より、

$$\begin{aligned}
 E_c^{(2)} &= E_1^{(2)} + E_2 + E_3 + E_4 \\
 &\cong \frac{G n^2 b^2}{8\pi(1-\nu)} \left( \ln \frac{2h}{nb} + \frac{1}{2} \right) + (2h + nb)r \\
 &\quad - \frac{\pi \nu \sigma_c^2 h^2}{8G} - p_+ \frac{nbh}{2} \dots\dots\dots (6 \cdot 20)
 \end{aligned}$$

(ここに静水圧応力成分として繰返し応力の引張り側の peak 時における値  $p_+$  を用いたのは、crack の核の発生が繰返し応力の引張り側で起こると考えられるためである。)

crack が生じるためには、(6・18)(6・20) 式より、

$$\begin{aligned}
 E_c^{(1)} - E_c^{(2)} &= \frac{G n^2 b^2}{8\pi(1-\nu)} \ln \frac{nb}{2b_0} + \frac{\pi \nu \sigma_c^2 h^2}{8G} \\
 &\quad + p_+ \frac{nbh}{2} - (2h + nb)r > 0 \dots\dots\dots (6 \cdot 21)
 \end{aligned}$$

の条件が満たされねばならない。

結局、(6・19) 式および (6・21) 式の二つの条件を同時に満たす転位の数  $n$  が存在するとき、crack の核の発生が可能となる。これを図式的に示すと図 6・5 のようになり、図の斜線部分が核の発生可能な  $n$  の値となる。ひとたび crack の核が出来ると、(6・21) 式からわかるように、 $E_c^{(1)}$  と  $E_c^{(2)}$  の差は  $n$  の増大に伴って大きくなるから、crack は安定に存在する。

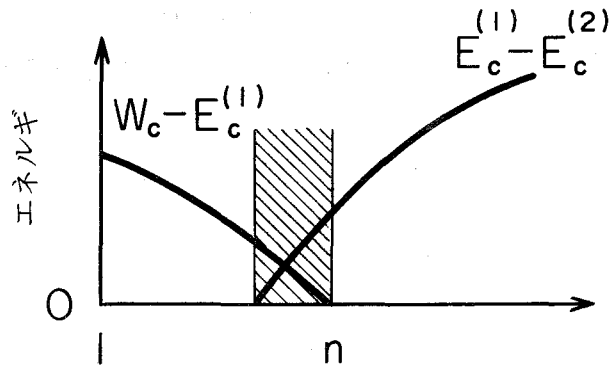


図 6・5 crackの核の発生のエネルギー的条件

### 6・3・2 crack成長の転位論的過程

crack長さ  $l$  が  $(10 \sim 10^4)b$  程度の範囲にあるときには、crackの成長に対して個々の転位の果す役割が大きいと考えられる。ここでは図6・3のような刃状転位の流入によるcrackを考え、 $h \leq nb/2$  であるとし、弾性エネルギー  $E_1$  としては(6・6)式で与えられる  $E_1^{(3)}$  を用いている。この段階においてもcrackの進展に伴う先端での塑性変形は小さいと考えられるから、 $\omega \cong 0$  とおくと(6・2)，(6・6)～(6・8)，(6・11)式より、

$$\begin{aligned}
 E_c^{(3)} &= E_1^{(3)} + E_2 + E_3 + E_4 \\
 &\cong \frac{G h^2}{2\pi(1-\nu)} \left( \ln \frac{nb}{2h} + \frac{1}{2} \right) + (2h + nb) \gamma \\
 &\quad - \frac{\pi \nu \sigma_c^2 n^2 b^2}{8G} - p_m \frac{nbh}{2} \dots\dots\dots (6 \cdot 22)
 \end{aligned}$$

ここに、 $E_4$  として1サイクル中の平均的な静水圧力成分  $p_m$  を用いたのはこの段階の crack の成長が連続的な性格を持つと考えられるためである。

外部から供給されるエネルギーは(6・12)，(6・14)，(6・16)式から与えられるが、この段階では転位が crack へ流入する際の障害は小さく、

転位の pile up も少ない ( $n' \cong n$ ) と考えられるから, (6・17)  
式と同様に,

$$W_c = \frac{n G b^2}{4\pi(1-\nu)} \ln \frac{r_1}{b_0} + n(\tau - \tau_0)bs$$

..... (6・23)

したがって, crack が成長するための条件 ( $dl/dN > 0$ ) は (6・22)  
(6・23) 式より, 次のように表わせる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dn} (W_c - E_c^{(g)}) &= \frac{G b^2}{4\pi(1-\nu)} \ln \frac{r_1}{b_0} + (\tau - \tau_0)bs \\ &+ \frac{\pi \nu \sigma_c^2 n b^2}{4G} + p_m \frac{bh}{2} - \frac{G h^2}{2\pi(1-\nu)n} - br > 0 \end{aligned}$$

..... (6・24)

### 6・3・3 crack 成長の半巨視的過程

crack の成長が進み,  $l \gg b$  となると, crack はもはや転位論的な性格を失い, 顕微鏡によって観察し得るようになるとともに, それを model 化した場合, 図 6・4 のような半巨視的あるいは弾塑性論的 (連続体的) な性格を持つようになると考えられる<sup>(20)(21)</sup>。すなわち, この段階では crack は前方で塑性変形を伴いながらそれ自身で成長していくと考えられる<sup>(2)(20)(21)</sup>。(これに対して図 6・3 の転位論的な crack では, crack 成長に寄与する転位は他の転位源から来たものである。)

この段階では, crack のエネルギー  $E_c'$  の 4 つの項の中で,  $l^2$  を含む  $E_3'$  の項が非常に大きくなり, これに比べて第 1 項  $E_1$  は無視できる。すなわち,

(6・2), (6・7), (6・8), (6・11) 式より,

$$\begin{aligned}
 E_c' &\cong E_2' + E_3' + E_4' \\
 &\cong 2(1+h)(\gamma+\omega) - \frac{\pi \nu \sigma_c^2 l^2}{8G} - p_+ h l \\
 &\dots\dots\dots (6 \cdot 25)
 \end{aligned}$$

と表わせる。(ここで, 各エネルギーの記号の右肩の' は, 図 6・4 の model に対応する値を示すものとする。また,  $E_4'$  の項に  $p_+$  を用いたのは, この段階の crack が段階的な成長をすることが認められていることによる<sup>(26)</sup>。)

さて crack があることによって解放された弾性エネルギー  $E_3'$  に相当して crack 先端には応力集中が生じ, その結果塑性変形が起こる。この crack 先端での塑性変形は応力繰返しとともに蓄積されて, 逆に次の瞬間の crack の成長に寄与すると考えられる。すなわち, crack の前方で蓄積されたひずみエネルギー  $W_1'$  は, crack 長さ  $l$ , 応力繰返し数  $N$  の関数となる。(なお, crack が成長するときの塑性仕事  $\omega$  ((6・25) 式第 1 項) も, その一部は還元され crack の成長に際してエネルギーを供給すると考えられるがこの影響は相対的に小さいと考えられる。) また, この段階では  $W_2$  は  $W_1'$  に比べて無視しうると考えられるから, (6・15) 式より,

$$\begin{aligned}
 W_c'(x, l, N) &\cong W_1'(x, l, N) = \frac{\rho_c(x, l, N) G b^2}{4\pi(1-\nu)} \ln \frac{r_1'}{b_0} \\
 &\dots\dots\dots (6 \cdot 26)
 \end{aligned}$$

ここで  $\rho_c$  は crack 先端付近で転位密度の最も高い部分の値である。一般に, crack 先端の応力分布から考えて,  $\rho_c$  の値は  $x$  の増加とともに減少すると考えられる(図 6・6)。



crack が成長するための条件 ( $dl/dN > 0$ ) は,  $dl = dx/2$  を考慮すると, (6・24) 式と同様に, (6・25), (6・26) 式より,

$$\frac{d}{dl} (W'_c - E'_c) = \frac{G b^2}{2\pi(1-\nu)} \ln \frac{r'_1}{b_0} \cdot \frac{d\rho_c(x, l, N)}{dx} + \frac{\pi \nu \sigma_c^2 l}{4G} + p_+ h - 2(\gamma + \omega) > 0 \quad \dots\dots\dots(6 \cdot 27)$$

と表わせる。

ここで, 以上において数式的に検討した図 6・4 の半巨視的 crack の成長過程の物理的な面を考

えてみる。まず, crack 先端部に塑性変形が起こり転位密度が増大する。平均的な転位密度はある繰返し数後にはほぼ一定となるが, その後応力の繰返しに伴って転位の再配列がおこり, subst-

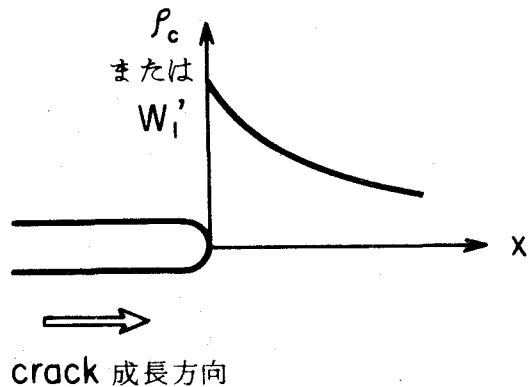


図 6・6 crack 先端におけるひずみエネルギーの分布 (図式的)

ructure が発達し, subgrainの粒界が明瞭になる<sup>(22)(23)</sup>。すなわち, subgrain の粒界の転位密度  $\rho_c$  は後者の過程においてもさらに増大し, crack 成長につながると考えられる。これは crack の進展が substructure 形成と密接な関係にあり, crack の進展が主に subgrain の粒界に沿って進むという電子顕微鏡による観察結果<sup>(10)(22)</sup>からも裏付けられている。

なお以上では crack 長さ  $l$  による crack の性格の違いについてのべた

が、(6・25)式の $E_s'$ の項は $l^2$ とともに $\sigma_c^2$ も含んでおり、負荷応力の大小によっても crack の挙動に違いが現われると考えられる<sup>(10)</sup>。すなわち、負荷応力が大きい場合には crack 長さが比較的短くても crack は半巨視的な性格を示すが、これに反して負荷応力が低く疲れ限度に近い場合には、crack はかなり成長するまで転位論的な性格を保持すると考えられる。これは、第1章にのべた応力値による結晶粒の硬化の差異と相まって、疲れの様相の応力値による相異となって現われると考えられる。

一般に疲れ破壊の理論において、半巨視的、連続体的な crack を考えているものでは、破壊の条件としてしばしば、crack 先端の微小領域における繰返しひずみの累積値が引張り破壊ひずみに等しくなったとき crack が進展するという仮定が用いられるが<sup>(20)</sup>、この累積値の物理的な意味は、材料中の平均的なひずみよりもむしろ subgrain boundary のような局所的な転位の量 $\rho_c$ に対応するものと考えられる。(ただし、疲れにおける破壊の条件として引張り破壊ひずみを用いることには、物理的な根拠は少ないと思われる。)

#### 6・3・4 crack の成長速度

以上の(6・24)式および(6・27)式は、crack の成長が可能な条件であるが、ここで crack の成長速度について考えてみる。

まず、図6・3の転位論的な crack の場合には、その成長速度は主として crack 外部で作られ出される転位の数あるいは転位の運動速度に支配されると考えられ(付録6・7参照)、成長速度は crack 長さによってはあまり変化しないと考えられる。これは結果的に、第4章でのべたように平滑材の疲れで数多くの微小な crack の発生が観察されること(図4・12)とも対応していると考えられる。

他方、図6・4の半巨視的 crack の場合、その成長速度は crack 前方に蓄積されたひずみエネルギー $W_c'$ に依存すると考えられ、先のエネルギー的条件((6・27)式)が crack 先端からどれだけの長さ( $x$ )だけ満たされ

ているかによって決定されると考えられる。すなわち、任意の長さ  $l$  の crack を考え、その成長が階段的であるとし、成長が止まった任意の繰返し数  $N$  から  $\Delta N$  回だけ応力が繰返されたときの  $W_c$  の値を  $W_c' (x, l, N + \Delta N)$  とする。このとき  $x = \Delta l / 2$  において、

$$\frac{d}{dl} (W_c' (\Delta l / 2, l, N + \Delta N) - E_c') = 0 \quad \dots\dots (6 \cdot 28)$$

が満たされるものとする、crack の成長速度は、

$$dl/dN = \Delta l / \Delta N \quad \dots\dots\dots (6 \cdot 29)$$

で与えられる。(6・29)式は先の(6・1)式に対応するものである。

crack の成長速度は、(6・28)式において主として  $W_c' (x, l, N)$  すなわち  $\rho_c (x, l, N)$  の形によって決定されると考えられるが、この関数形はエネルギー的な論議からは求まらない。これを求めるためには、crack 先端での応力分布などの力学的な因子と、材料の強度的な性質、および crack 成長の具体的な機構についての知識を必要とする<sup>(20)</sup>。

#### 6・4 平均応力の影響

crack のエネルギー  $E_c$  ((6・2)式)の4つの項の中で、主として  $E_3$  (あるいは  $E_3'$ ) と  $E_4$  (あるいは  $E_4'$ ) の項が平均応力によって影響を受けるが、外部応力の符号によって変化するのは  $E_4$  ( $E_4'$ ) の項だけである。すなわち、引張り平均応力が crack の成長を速め、圧縮のそれが成長を遅らせる(図4・13)のは、(6・22)式の  $P_m V_c$  あるいは(6・25)式の  $P_+ V_c'$  の項の影響によると考えられる。すなわち、crack 成長の転位論的段階および半巨視的段階ともに、その成長速度に対して平均応力の影響のあることが期待される。

ここで crack 成長の半巨視的段階を例にとり、これらの関係を図式的に示すと図6・7のようになる。すなわち平均応力  $\sigma_m$  の影響は、 $E_3'$  と  $E_4'$

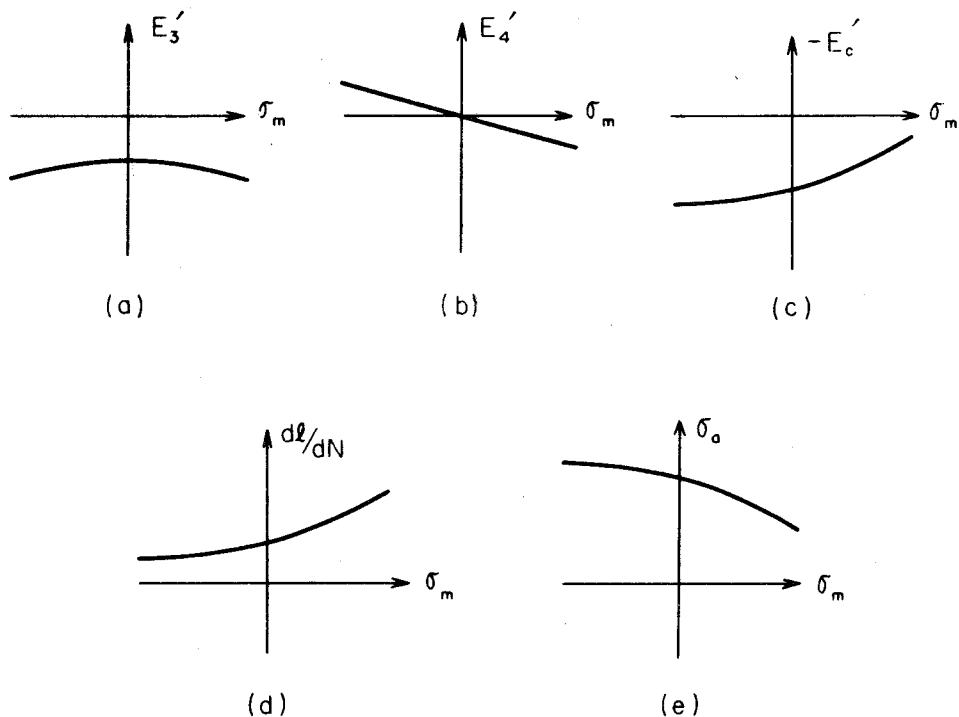


図 6・7 平均応力と crack のエネルギー， crack の 成長速度および疲れ寿命の関係

に対してそれぞれ図 6・7 (a) および (b) のようになり，したがって crack のエネルギー  $-E'_c$  に対しては図 6・7 (c) のようになる。このとき， crack の成長速度  $dl/dN$  と  $\sigma_m$  の関係は図 6・7 (d) のようになると考えられる ((6・27)～(6・29) 式)。したがって，疲れ強さあるいは疲れ寿命は図 6・7 (e) のような傾向を示すと考えられる。これは，Sines<sup>(24)</sup> による疲れ強さに対する平均応力の影響についての実験結果の整理，図 4・1 に対応するものである。

さて、crack の半巨視的段階を例にとりて、(6・27)式の  $E_4'$  に対する項と  $E_3'$  に対する項の比をとってみると、 $\pi \nu \cong 1$  であるから、近似的に  $p_+ \cong \sigma_c / 3$  と考えて、

$$\frac{dE_4' / dl}{dE_3' / dl} \cong \frac{G}{\sigma_c} \cdot \frac{h}{l} \dots\dots\dots (6 \cdot 30)$$

となる。平均応力の正負が影響するのは  $E_4'$  の項のみであることを考えると、(6・30)式から crack の形  $h/l$  によって平均応力の影響が異なってくる事が予想され、これはまた材料による平均応力の影響の相異とも関連していると考えられる。

Sines<sup>(24)</sup> は図4・1に示すように平均応力の影響として、すべり面に働く垂直応力成分 ( $N_1 + N_2$ ) を考えるとうまく整理できることを示しているが、この項はまた応力の静水圧成分とも見なすことができる(なぜなら  $N_3$  は表面に垂直な応力成分で0となる)。これは先のエネルギー的な考察において、平均応力が主に静水圧応力成分  $p$  の形で影響すると推論した点を裏付けるものであると考えられる。

ねじり疲れの場合には、 $p = 0$  であって、エネルギー的に見ると  $E_4 \cong 0$  ( $E_4' \cong 0$ ) となり、平均応力の影響を受けるのは  $E_3$  (あるいは  $E_3'$ ) の項のみとなる。これから、ねじり疲れにおいて平均応力の影響が少ないこと(4・3節)が理解される。

## 6・5 考 察

### 6・5・1 疲れ crack の model

上では正負の転位が合体して出来る crack (図6・1)を考えたが、転位論的な crack のもう一つの代表例は図6・8に示すような転位の pile up によって出来る crack である。ここで、疲れ crack の核の発生の model として両者のいずれがより妥当であるかを、同じくエネルギー的な観

点から検討してみる。

図 6・8 の crack の応力場の弾性エネルギー  $E_1''$  は次のように求められている<sup>(25)</sup>。

$$E_1'' = \frac{G n^2 b^2}{4\pi(1-\nu)} \ln \frac{4r}{l'} \quad \dots\dots\dots(6 \cdot 31)$$

ここに、 $r$  は crack によるひずみの到達距離（半径）である。

一般に  $r$  は  $10^{-4}$  cm 程度の値であって<sup>(19)</sup>、他に比べてかなり大きく（ $l'$ 、 $2h$ 、 $nb$  はほぼ同程度の値である）、

$4r/l' \gg 2h/nb$  となると考えられるから、（6・5）

式および（6・31）式より

$E_1^{(2)} \ll E_1''$  となる。したがって、疲れのように低い応力で破壊する場合には、図 6・8 の model よりも図 6・1 の model の方がエネルギー的にはより妥当であると考えられる。疲れ破壊が引張り破壊にくらべてはるかに低い転位密度で起こること<sup>(23)</sup>、また疲れでは繰返し応力が作用するため転位の pile up が起こりにくいこと、さらに第 4 章でものべたように、疲れ crack が最初すべり線に沿って生じる事実<sup>(26)</sup>、なども図 6・1 の model を支持するものであると考えられる。（ただし、折出物などの不純物の応力集中効果がある場合には事情はより複雑になると考えられる。）

なお、図 6・1 あるいは図 6・3 では刃状転位を考えているが、疲れにおいて刃状転位の果す役割の大きいことは、たとえば表面の extrusion , intrusion が刃状転位の働く面によく生じるという観察結果<sup>(12)</sup>からも予

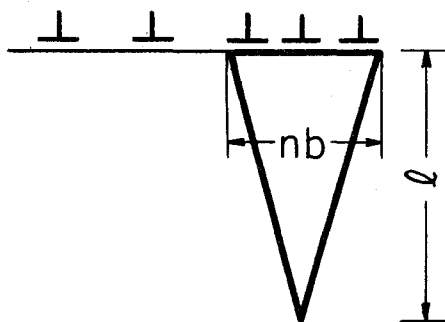


図 6・8 転位の pile up による crack の model

想されるものである。

### 6・5・2 crack の伝播方向

ここでは、引張り圧縮（一軸応力）の場合とねじりの場合とを比較して、crack の成長方向について考える。一般に crack の長さ  $l$  がある程度以上の大きさになり、(6・25) 式の  $E_3'$  の項が他の項に比べて大きくなるとともに、crack も  $E_3'$  の値を最大にする方向に伝播すると考えられる。

$E_3'$  は crack に垂直応力  $\sigma_c$  が働く場合 (図 6・4)

とせん断応力  $\tau_c$  が働く場合 (図 6・9) とで、応力の係数がほぼ同じ形となることが知られている<sup>(27)</sup>。すなわちその係数を  $R$  とすると近似的に、

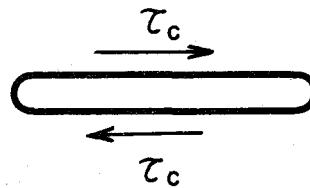


図 6・9 crack にせん断応力が働く場合

$$(E_3')_{\sigma} = R\sigma_c^2, \quad (E_3')_{\tau} = R\tau_c^2 \quad \dots\dots\dots (6・32)$$

と書ける。

さて、両振り応力の場合について考えると、引張り圧縮で負荷応力が  $\sigma_a$  のとき、crack が応力軸  $45^\circ$  をなす方向（最大せん断応力方向）に進む場合には (6・32) 式より、 $E_3' = R\sigma_a^2/2$  となるが、一方軸と直角方向に伝播すると  $E_3' = R\sigma_a^2$  となる。したがって、crack の伝播方向は crack が成長するにつれて応力軸と直角な方向に近づくと考えられる<sup>(28)(29)</sup>。

第 4 章 でも一部のべた顕微鏡観察によって認められている事実、すなわち引張り圧縮の場合 crack は最初すべり線に沿って生じるが、ある程度以上の長さに成長すると応力軸と直角な方向に伝播すること<sup>(26)</sup> もこれから理解される。

次にねじり疲れの場合には、応力振幅を  $\tau_a$  とすると、(6・32) 式から crack が試験片軸方向（または接線方向）に伝播するときには  $E_3' = R\tau_a^2$  であるが、軸と  $45^\circ$  をなす方向（主応力方向）に伝播するときにも同じく

$E_3' = R \tau_a^2$  となって、エネルギー的には両者ではほとんど差異がない。実験的にもねじり疲れの場合、crack の伝播は軸方向あるいは接線方向と、それらと  $45^\circ$  をなす主応力方向の両者が観察されている<sup>(27)(30)</sup>。

### 6・5・3 疲れ以外の破壊との比較

疲れ破壊は外見的にぜい性破壊に似ていると言われている。エネルギー的に見ると、一般にぜい性破壊では crack 先端での塑性仕事はなく、また外部から供給されるエネルギーもない。一方、疲れ破壊においては  $W_1'$  と  $\omega$  は共に存在するが、それらが互に釣り合い、打消し合っているため ( (6・27) 式 ), 外見的に破壊様式がぜい性破壊に似るようになったものと考えられる。これに対して、一般の延性引張り破壊においては  $\omega$  の値は大きく、一方  $W_1'$  はこれに較べて小さいため、外見的にも疲れ破壊とは様相を異にする。

よく知られているように、ぜい性破壊に対する Griffith crack の考え方では、先の記号をそのまま用いると、 $dE_c'/dl = 0$  が破壊の条件になり、ある臨界長さの crack の核の発生がそのまま破壊の条件になると考えている<sup>(18)</sup>。これに対して、ここでは疲れ破壊を連続的な過程として考え、crack の成長速度がエネルギー的条件によって規定され则认为しているわけであって、第5章でのべた空孔の拡散の場合と幾分類似しており、特に周囲の応力場が静水圧力成分  $p$  の形で働くと考えられる点においては一致する。ただし、後者が熱的励起過程であるのに対し、前者ではエネルギーを供給するのは crack 自身の応力集中による塑性仕事である点で相異している。

### 6・5・4 ま と め

以上のエネルギー的な考察から導かれる結論は定性的なものである。より定量的な取扱いはさらに crack 成長の具体的な機構についての知識、たとえば crack 成長時の塑性変形  $\omega$  の値、などが必要となるが、疲れ破壊の多様性のためであって、現在のところこれらについては十分に知られてはいない。しかしながら、たとえそれらの機構が幾分異なっても、エネルギー的には先の



(6・19), (6・21), (6・24)あるいは(6・27)式の各項の係数がそれぞれ少しずつ変わるだけで、本質的な差異はないと考えられる。いいかえると、微視的あるいは半巨視的な疲れ破壊の物理的な機構あるいは理論を考える場合にも、それはここでのべたエネルギー的な関係を満足するものでなければならない。

ところで、本章で試みた考察は、序論でのべたような材料の強さの研究の分類からすると、微視的 (micro) でかつ現象論的 (エネルギー的) なものであると言える。すなわち、疲れの微視的な機構 (たとえば, intrusion - extrusion mechanism など) そのものを論じるのではなく、エネルギー的な考察を micro な現象に対して当てはめ、micro な現象の統計的な挙動を論じようとするものである。これは巨視的な取扱いと、微視的かつ物理像的な取扱いの中間に位置し、両者を結びつける役割をはたすものであると考えられる。

## 6・6 結 言

平均応力下の疲れ破壊機構に関連して、疲れ crack の発生、成長についてエネルギー的な観点から考察を加え、疲れの問題を総括的に記述することを試みた。その主な点を要約すると次のようになる。

(1) 疲れ crack の成長を転位論的な機構を考慮しながら、エネルギー的な観点から考察した。すなわち、crack を作る際のエネルギー、crack のまわりの応力場との相互作用エネルギー、および外部から供給されるエネルギーの相関性について検討を加えた。

(2) crack に関するエネルギーの各項の内でいずれが重要であるかによって、crack の成長過程はほぼ三つの段階、すなわち crack の核の発生過程、転位論的 crack の成長過程、半巨視的 crack の成長過程に分けられる。

(3) crack の成長は転位論的な段階では外部から転位の流入という形で

ひずみエネルギーの供給を受け、すべり面に沿って成長すると考えられる。これに対して、半巨視的段階では crack は先端での応力集中効果により、塑性変形を伴いながらそれ自身で成長していくと考えられる。

(4) 平均応力は crack の成長に対して、主として crack の体積を増すためのエネルギーとして影響を及ぼす。またその影響はほぼ静水圧応力成分の形で作用すると考えられる。

## 6・7 付 録 転位論的な crack でその成長速度が転位の流入速度に依存する場合の疲れ破壊機構の一考察

本文中では、主としてエネルギー的な検討についてのべ、具体的な crack 成長の機構については触れなかったが、ここでは後者の一例として転位の速度の影響が大きい場合を考え、図 6・3 のように刃状転位が crack に流入するという model にもとづいて、S-N 曲線を誘導することを試みる。

図 6・3 において、応力繰返しの半サイクルに流入する転位の数  $\Delta n/2$  は、平面的な crack を考えると、

$$\frac{\Delta n}{2} = C' \int_0^{T/2} \rho_m^{1/2} \cdot v \, dt \quad \dots\dots\dots (6 \cdot 33)$$

で与えられる。ここに、 $\rho_m$  は動きうる転位の密度、 $v$  は転位速度、 $T$  は応力周期である。 $C'$  は定数 ( $C' \leq 1$ ) であるが、転位が crack に流入する確率に相当し、エネルギー的条件によって変化する ((6・24) 式)。

以下では簡単のため、 $\rho_m$  は疲れ過程において一定で、負荷応力の大小によっても変化しないとする。転位速度  $v$  は体心立方金属では次の形で与えられることが知られている<sup>(31)(32)</sup>。

$$v = (\tau/D)^m \quad \dots\dots\dots (6 \cdot 34)$$

ここに、 $D$ 、 $m$  は材料による定数である。また、応力波形を sin 波であ

るとすると、応力振幅を  $\tau_0$  としたとき、

$$\tau = \tau_0 \sin(2\pi t/T) \quad \dots\dots\dots (6.35)$$

とおける。ここに、応力繰返し速度を  $f_1$  rpm とすると、 $T = 1/f_1$  である。(6.34)、(6.35)式を(6.33)式に代入して整理すると、

$$\frac{\Delta n}{2} = A' \cdot \frac{1}{f_1} \cdot \tau_0^m \quad \dots\dots\dots (6.36)$$

$$A' = \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m+2}{2})} \cdot \frac{C' \rho_m^{1/2}}{2\sqrt{\pi} D^m}$$

を得る<sup>(33)</sup>。1 サイクル中に crack が成長する長さを  $\Delta l$  とすると、 $\Delta l = \Delta n \cdot b/2$  で与えられるから、繰返し数  $N_0$  における crack の長さを  $L_0$ 、 $N_1$  における値を  $L_1$  とし、 $A = A' b$  とおくと、(6.36)式より、

$$L_1 - L_0 = A \frac{1}{f_1} \tau_0^m (N_1 - N_0) \quad \dots\dots\dots (6.37)$$

crack が一定の長さ  $L_c$  になったとき破断するものとし、そのときの繰返し数を  $N_c$ 、かつ  $N_c \gg N_0$  とすると、(6.37)式より繰返し速度  $f_1$  が一定のとき、

$$\log \tau_0 = C - \frac{1}{m} \log N_c \quad \dots\dots\dots (6.38)$$

を得る。これは S-N 曲線を表わしており、その勾配は  $1/m$  となる。炭素鋼の疲れ試験結果<sup>(34)</sup>では  $m \cong 10$  となるが、これは別にひずみ速度の応力依存性から求められた  $m$  の値<sup>(35)</sup>とよく一致している。

## 文 献

- (1) D. G. Bellow and B. R. Lang, Can. Met. Quart., 5  
(1966), 19.
- (2) H. W. Liu, Trans. ASME, 83, Ser. D (1961), 23 :  
ibid. 85, ser. D (1963), 116.
- (3) P. C. Paris and F. Erdogan, Trans. ASME, 85, Ser. D  
(1963), 528.
- (4) N. E. Frost, Proc. 1st, Int. Conf. Fracture, (1966),  
1433.
- (5) D. Broek and J. Schijve, Aircr. Engng., 3 (1967),  
No 3, 10.
- (6) P. J. E. Forsyth, Proc. Roy. Soc. A 242 (1957), 198.
- (7) 石田, "第13回強度と破壊シンポジウム集録", (昭43), 59.
- (8) R. J. Dower, Acta Met., 15 (1967), 497.
- (9) E. Fujita, Sci. Rep. RITU, A 6 (1954), 565.
- (10) W. A. Wood, S. Cousland and K. R. Sargant, Acta Met.,  
11 (1963), 643.
- (11) R. J. Hartmann and E. Macherauch, Z. Metall., 54  
(1963), 197.
- (12) J. D. Meakin and N. J. Petch, "Fracture of Solids",  
Ed. by D. C. Drucker et al, (1963), 393,  
Interscience.
- (13) P. P. Gillis, Acta Met., 14 (1966), 1673.
- (14) J. Friedel, "Dislocations", (1964), 40,  
Pergamon.
- (15) たとえば, 藤田, "第9回材料の強度と疲労シンポジウム予稿", (昭  
39), 63, 金属学会; 中沢, 機械の研究, 20 (昭43), 55.

- (16) I. N. Sneddon, "Fourier Transforms", (1951), 422, McGraw-Hill .
- (17) A. N. Stroh, Proc. Roy. Soc., 232(1955), 548 .
- (18) J. W. Craggs , 文献(12), 51 .
- (19) 鈴木, "転位論入門", (昭42), アグネ .
- (20) F. A. McClintock, 文献(12), 65 .
- (21) S. R. Valluri, Acta Met., 11(1963), 759 .
- (22) 辛島, 及川, 小倉, 日本金属学会誌, 31(1967), 674 .
- (23) 平, 林, 田中, 材料, 16(昭42), 997 .
- (24) G. Sines, NACA Tech. Note. 3495(1955) .
- (25) A. N. Stroh, Proc. Roy. Soc., A223(1954), 404 .
- (26) P. J. E. Forsyth, Acta Met. 11(1963), 703 .
- (27) 石橋, 機械学会論文集, 31(昭40), 1818 .
- (28) F. A. McClintock, J. Appl. Mech., 19(1952), 54 .
- (29) 横堀, 市川, "第11回材料の強度と疲労シンポジウム予稿", (昭41), 41, 金属学会 .
- (30) 河本, "金属の疲労"(昭37), 179, 朝倉 .
- (31) J. J. Gilman and W. G. Johnston, J. Appl. Phys., 30(1959), 129 .
- (32) D. F. Stein and J. R. Low, J. Appl. Phys., 31(1960), 362 .
- (33) 吉川, Acta Met., 13(1965), 1025; 金材技研報告, 9(1966), 79 .
- (34) 機械学会編, "疲れ強さの設計資料(I)", (昭36) .
- (35) T. Takeuchi and I. Ikeda, J. Phys. Soc., Japan, 18(1963), 488 .

## 結

## 論

本研究は、金属材料の疲れおよび塑性に関して、X線による基礎的な実験、およびその結果にもとずいた解析ならびに考察を行なったもので、機械工学の分野における材料の強さに関する巨視的な諸現象に対して、微視的な観点を取り入れ、相互の関連を求めることを目的の一つとしている。

まず第I部においては、多結晶の塑性および疲れの問題をとり上げ、結晶粒の方位の問題を実験的および解析的に検討した。すなわち、まず第1章では、X線回折線半価幅変化の回折面依存性に、結晶の方位による因子の影響があることを示し、次にこれを利用して、疲れと塑性変形における結晶粒の方位の影響について実験的に検討した。その結果、低応力の疲れにおいてはすべりやすい方位を向いた結晶でも微視的変形が進むこと、一方低ひずみの塑性変形では結晶粒相互の拘束のため方位によらず変形はほぼ同様に生ずること、さらに高応力の疲れあるいは比較的ひずみの大きい領域の塑性変形においては、結晶粒方位の影響としては加工硬化係数 $K$ の方位による差異が重要であること、などが判明した。すなわち、銅のように異方性の強い材料の場合には、 $K$ の方位依存性を考えた多結晶の変形 model を導入する必要がある。

次に第2章においては、第1章で実験的に明らかになった諸点、および多結晶体の変形の model を用いて、多結晶金属の降伏条件を各結晶粒におけるすべりとの関係において解析的に検討した。その結果、多結晶金属の降伏条件は結晶のすべり面、あるいはすべり方向の数と密接な関係にあることが明らかになった。すなわち、ねじりと引張りの降伏応力比  $\tau/\sigma$  の値は、ス

テレオ投影を用いて Schmid factor の平均値を図式的に求めることにより得ることができる。まず bcc 金属において結晶方位が等方的な場合には  $\tau/\sigma = 0.57$  となり、優先方位  $[110]$  あるいは  $[100]$  がある場合には  $\tau/\sigma$  の値はこれよりも幾分大きくなる。一方、hcp 金属では  $\tau/\sigma = 0.590$  となる。

次に、Schmid factor の平均値を積分により求める方法を提案し、これを用いてすべりと降伏条件の関係について一般的な考察を行なった。その結果、降伏応力比  $\tau/\sigma$  に主としてひびくのは、すべり面、すべり方向の内で数の少ない方  $m$  の数  $n_m$  とその  $m$  に含む方位  $m_i$  相互の方位関係であることを指摘した。一般に  $n_m$  が大きくなると  $\tau/\sigma$  の値は減少し、 $n_m = \infty$  では  $\tau/\sigma = 0.500$  となる。また、bcc 金属あるいは fcc 金属で  $\tau/\sigma$  の値が von Mises の法則による値にほぼ一致するのも、これらの結晶が特定のすべり面あるいはすべり方向を持っていることによると考えられる。

このように結晶のすべりを考えに入れることにより、多結晶金属の降伏条件と結晶構造あるいは結晶粒の集合状態の間の相関性に検討を加えることが可能となるが、このような問題は塑性加工などの実用面においても重要であると思われる。

第3章においては、先に第1章で実験結果にもとづいて提案した model を用いて、異方性結晶からなる多結晶金属の変形に伴う材料内の応力、ひずみ分布を結晶粒相互の拘束率という概念を導入して解析的に検討した。

すなわち、応力 — ひずみ関係が、(a) 直接的、(b) 指数関数的、である場合について、それぞれ一軸変形における変形挙動の基礎的な考察を行なった。その結果、粒界における粒相互の拘束がなければ、いずれの場合にも応力一定の条件がエネルギー的に安定であることが判明した。また粒界の拘束の影響については、粒界のひずみ領域が増すほど、すなわち多結晶体の受けるひずみが大きくなり結晶粒径が小さくなるほど、応力一定の条件からひずみ一定の条件に近づく傾向があることを示した。さらに、弾性および塑性異方性

材における変形とX線線回析線の peak shift の間の基礎的な関係式を導き、結晶塑性の問題をX線的に求める方法について検討した。

第Ⅱ部においては、疲れ過程における平均応力あるいは残留応力の問題をとり上げ、X線によって実験的に検討を加えるとともに、その結果を材料の微視的組織変化あるいは疲れ機構との関連において考察した。まず第4章においては、疲れ過程における平均応力の役割について実験的に検討した。すなわち、半価幅変化、残留応力変化および組織変化を対応させた結果、まず曲げ疲れの場合には、初期の疲れ硬化（第1段階）には平均応力の顕著な影響が認められないが、第2段階あるいは第3段階の microcrack あるいは顕微鏡的 crack の成長過程には平均応力の影響が認められた。これに対してねじり疲れの場合には、上の諸変化に平均応力の顕著な影響が認められなかった。したがって、ねじり疲れの場合、疲れ機構はねじり平均応力によって本質的な影響を受けず、その結果として疲れ強さも平均応力によって大きく変化しないものと考えられる。

続いて第5章においては、焼きなまし材の疲れ過程に発生する残留応力の挙動をX線応力測定法を用いて追求するとともに、その変化の機構について考察を加え、さらにその疲れ寿命への影響についても検討した。すなわち、まず曲げおよびねじり疲れで、一定応力振幅および負荷応力（応力振幅、平均応力）が変動する場合について、試料表面の残留応力変化を調べた。その結果、ねじり疲れでは初期に引張残留応力を生じ、その挙動は応力変動によってほとんど影響を受けないが、他方これとは対称的に曲げ疲れの場合には、両振りにおいては圧縮の残留応力、平均応力がある場合には平均応力と逆の符号の残留応力がそれぞれ生じ、これらはまた負荷応力の変化によって敏感に影響を受けることが明らかとなった。

このような残留応力の特徴ある変化は疲れ機構とも密接に関連すると考えられるが、微視的な点をも考慮して検討した結果、両振り応力下の残留応力の発生には、材料中での原子空孔の発生と移動に対する静水圧力成分の影響



が重要であることが推論された。さらに、両振り曲げ疲れにおける圧縮残留応力の減少過程についても、試料を表面に平行な薄い層にわけ、層間の相互の拘束を考えに入れた model を用いて考察を加えた。

曲げ疲れとねじり疲れで残留応力の変化の傾向が異なっていることから、その寿命への影響についてもそれぞれ区別して考える必要がある。すなわちねじり疲れの場合疲れ過程に発生する残留応力の寿命への影響はほとんどないが、曲げ疲れの場合はかなり影響することがある。これは実働応力下の疲れとも関連する問題であると考えられる。

第6章においては、第4章にのべた実験結果にもとづいて、疲れ crack の発生、成長について、微視的ないしは半巨視的な観点からエネルギー的に考察し、疲れの問題を総括的に記述することを試みた。crack に関するエネルギーにはいくつかの因子があるが、それらの因子の中でいずれが重要であるかによって、crack の成長過程はほぼ3つの段階、すなわち crack の核の発生過程、転位論的な crack の成長過程、半巨視的 crack の成長過程に分かれ、それぞれに特徴的な挙動を示すと考えられる。平均応力は crack の成長に対して主として静水圧応力成分  $p$  の形で作用し、crack の体積  $V$  を増すためのエネルギー  $pV$  として影響を及ぼすと考えられる。

最後に、本研究でのべたような材料の強さの研究の macro と micro の結びつきに関しては、今後とも種々の観点から追求されるべき多くの問題が含まれていると考えられるが、本研究に直接的に関連した今後の問題としては、たとえば次のような点があると考えられる。まず、多結晶の疲れにおいて、応力値による硬化の様相の差異は、crack の発生源などとも関連し、興味ある問題であるが、これについては今後の実験的な検討が必要である。多結晶の塑性においても、ひずみが大きく、結晶の回転などを含む領域については、さらに実験的な検討が必要である。多結晶の変形の解析においても結晶粒の形状の影響や粒界の役割については今後検討する必要があると考え

られる。また一般に、多結晶の変形に関しては種々の考え方が可能であると思われるが、適切な解析法を開発するとともに、それら相互の関連を明らかにすることも今後の課題である。

## 謝

## 辞

本研究を行なうにあたり，終始御指導いただいた京都大学教授 平 修二博士に深甚の謝意を表します。また本研究をはじめるに際して種々の御指導，御鞭撻を受けた岡山大学教授 本田和男博士ならびに平教授研究室に在籍された各位に対し厚く御礼申し上げます。

論文をまとめるに際して御支援を与えられた京都大学教授 大矢根守哉博士に深く感謝の意を表します。

また本研究を進めるにあたり助言をいただいた立命館大学教授 村上裕則博士に厚く御礼申し上げます。

実験に協力された京都大学学生 吉岡和威君，長尾真人君，永広尚志君，平良 昭君に謝意を表します。

また，種々の討論をいただいた京都大学 高村教授研究室の各位，ならびに数値計算に際して御援助を受けた京都大学計算センターに厚く御礼申し上げます。